دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه دکتري در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

بررسی امکان ساختاری شدن و راسری شدن برخی اثبات های قضیه ناتمامیت گودل

استاد راهنما

سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور

جعفر صادق عیوضلو

پژوهشگر

پیام سراجی

۱۳۹۵

ای جهان دیده بود خویش از تو

هیچ بودی نبوده پیش از تو

در بدایت بدایت همه چیز

در نهایت نهایت همه چیز

ای برارنده سپهر بلند

انجم افروز و انجمن پیوند

آفریننده خزاین جود

مبدع و آفریدگار وجود

هستی و نیست مثل و مانندت

عاقلان جز چنین ندانندت

(هفت پیکر، نظامی گنجوی)

تقدیم به:

پدر و مادرم

بنام حضرت حق

همانا زکات علم نشر آن است.

خداوند بزرگ را شکرگزارم که به این بنده ناچیز توفیق عطا فرمود تا اندکی از علم لایزال او بهره‌مند گشته و توفیق داشته باشد رساله کوچکی بنویسد که برخی از زیبایی‌های علم ریاضیات را نمایان می‌سازد. ابتدا باید از زحمات جناب آقای دکتر **سعید صالحی پور مهر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نموده و از خداوند بزرگ برایشان سلامت و سرافرازی هرچه بیشتر طلب می‌نمایم. از جناب آقای دکتر**جعفرصادق عیوضلو** که زحمت مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، کمال سپاس و امتنان را دارم.

در ادامه از زحمات ارزنده‌ی **جناب آقای دکتر اصغر رنجبری** و **جناب آقای دکتر هژیر حومئی** قدردانی می‌نمایم. و در پایان از تمامی اعضای خانواده‌ام، دوستان و اساتید دانشکده علوم ریاضی که در طول دوران تحصیل همواره یار و حامی اینجانب بوده‌اند، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

پیام سراجی

۱۳۹۵

نام خانوادگی دانشجو: سراجی		نام: پیام

عنوان: بررسی امکان ساختاری شدن و راسری شدن برخی اثبات های قضیه ناتمامیت گودل

استاد راهنما : سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور : جعفر صادق عیوضلو

مقطع تحصیلی: دکتري		رشته: ریاضی محض		گرایش: منطق ریاضی		دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی		تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۵		تعداد صفحات: ۶۷

کلید واژه‌ها: قضایای ناتمامیت گودل، راسری سازی، ساختاری سازی، پیچیدگی کولموگوروف، پارادکس بِری.

چکیده

در این رساله به بررسی دو خاصیت «راسری شدن» و «ساختاری شدن» برای برخی اثبات‌های قضیه اول ناتمامیت می‌پردازیم. منظور از «راسری شدن» این است که اثبات ناتمامیت نظریه فقط با استفاده از شرط سازگاری آن (و نه شرط قوی‌تری مانند ωـ سازگاری) باشد و منظور از «ساختاری شدن» این است که الگوریتمی برای محاسبه (یکی از) گزاره های تصمیم ناپذیر ارایه شود. ما اثباتی از قضیه اول ناتمامیت ارایه می‌دهیم که بسیار شبیه برهان شایتین است ولی فقط از سازگاری ساده نظریه استفاده می‌کند. ولی در مورد اثبات بولوس نشان می‌دهیم که شرط بهینه برای آن، سازگاری نظریه با جمله سازگاري خودش است. در مورد ساختاری شدن، ثابت می‌کنیم که هیچ یک از دو اثبات بولوس و شایتین ساختاری نیستند. در فصل آخر، تعمیم‌هایی از قضیه اول ناتمامیت برای نظریه‌های تعریف‌پذیر را ارایه مي‌کنیم. مقاله‌هاي مستخرج از این پایان‌نامه به شرح زیر هستند:

1- S. Salehi & P. Seraji, “Gödel-Rosser Incompleteness Theorem, Generalized and Optimized for Definable Theories” (2016), To appeare in *Oxford Journal of Logic and Computation*, doi: 10.1093/logcom/exw025.

2- S. Salehi & P. Seraji, “Constructivity and Rosserizibility of the Proofs of Boolos and Chaitin for Gödel’s Incompleteness Theorem” (2016), submitted for publication.

البته مقاله زیر نیز در طول دوره انجام پایان‌نامه، در مورد موضوعاتي خارج از بحث رساله، آماده و براي چاپ ارسال شده است:

3- P. Seraji & C. Chao, “Generalizing Gödel Second Incompleteness Theorem for Definable Theories” (2016), submitted for publication, arXiv:1602.02416 [math.Lo].

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نظریه‌هاي حساب

نظریه‌هایی که در این رساله بررسی می‌کنیم معمولاً در «زبان حساب»، یعنی زبانی شامل نمادهای 0، $\mathtt{s}$، $+$، $\cdot$ و $<$، می‌باشند ($=$ را به عنوان نمادی از منطق در نظر می‌گیریم). در نظریه‌های حساب، ترم $\mathtt{s}(\mathtt{s}(...\mathtt{s}(0)..))$ (n بار)، که نماینده عدد n است را با $\overline{n}$ نشان می‌دهیم. عدد گودل یک فرمول φ را با نماد $\ulcorner\varphi\urcorner$ نشان می‌دهیم. ساده ترین نظریه‌ای که برای حساب در نظر می‌گیریم، «حساب رابینسون»[1] است که آن را با Q نشان می‌دهیم. اصول این نظریه به صورت زیر می‌باشند:

1- $\forall x: \ \mathtt{s}(x) \neq 0$

2- $\forall x, y: \ \mathtt{s}(x) = \mathtt{s}(y) \to x = y$

3- $\forall x: \ x + 0 = x$

4- $\forall x, y: \ x + \mathtt{s}(y) = \mathtt{s}(x + y)$

5- $\forall x: \ x \cdot 0 = 0$

[1] Robinson arithmetic

6- $\forall x,y:\ x\cdot \mathtt{s}(y)=x\cdot y+x$

7- $\forall x:\ x\neq 0\rightarrow \exists y:\ x=\mathtt{s}(y)$

8- $\forall x,y:\ x<y\leftrightarrow \exists z:\ \mathtt{s}(z)+x=y$

با وجود سادگی اصول، این نظریه توانایی های زیادی دارد؛ تمامی توابع بازگشتی جزئی[۲] در این نظریه قابل نمایش هستند و قضیه اول ناتمامیت هم در این نظریه قابل اثبات است ([۵]). براي تعریف توابع بازگشتي جزئي، ابتدا باید مجموعه توابع «بازگشتي مقدماتي»[۳] را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. توابع «بازگشتي مقدماتي» کوچکترین مجموعه از توابع $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ است که شامل تابع ثابت صفر ($Z(x)=0$)، تابع تالي ($S(x)=x+1$)، و توابع تصویر ($h(x_1,\cdots,x_n)=x_i$) بوده و تحت ترکیب و بازگشت بسته باشد، یعني اگر توابع:

$f(x_1,\cdots,x_m),g_1(y_1,\cdots,y_n),g_m(y_1,\cdots,y_n)$

بازگشتي مقدماتي باشند، آنگاه تابع $h(y_1,\cdots,y_n)=f(g_1(y_1,\cdots,y_n),\cdots,g_m(y_1,\cdots,y_n))$ نیز بازگشتي مقدماتي است و اگر توابع $f(x_1,\cdots,x_n)$ و $g(y,z,x_1,\cdots,x_n)$ بازگشتي مقدماتي باشند، آنگاه تابع $h(y,x_1,\cdots,x_n)$ که به صورت زیر تعریف مي‌شود نیز بازگشتي مقدماتي است:

$$h(y,x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases} f(x_1,\cdots,x_n) & \text{if}\quad y=0\\ g(y-1,h(y-1,x_1,\cdots,x_n),x_1,\cdots,x_n)) & \text{if}\quad y>0\end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۱. براي هر تابع $f(x,y_1,\cdots,y_n)$ قرار مي‌دهیم:

$$\mu_x(f(x,y_1,\cdots,y_n)=0)=\begin{cases} a & \text{if a is minimum x which satisfies}\quad f(x,y_1,\cdots,y_n)=0\\ \uparrow & \text{if there is no such a x}\end{cases}$$

(نماد $\uparrow$ به این معنا است که در این حالت $\mu_x(f(x,y_1,\cdots,y_n)=0)$ تعریف نشده است).

---

[۲] partial recursive functions

[۳] primitive recursive

مثال ۳.۱.۱. تابع جمع بازگشتی اولیه است، چون:

$$x + y = \begin{cases} x & \text{if} \quad y = 0 \\ s(x + (y-1)) & \text{if} \quad y > 0 \end{cases}$$

مثال ۴.۱.۱. تابع ضرب بازگشتی اولیه است، چون:

$$x \cdot y = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y = 0 \\ x \cdot (y-1) + x & \text{if} \quad y > 0 \end{cases}$$

مثال ۵.۱.۱. تابع توان (2^x) بازگشتی اولیه است، چون:

$$2^x = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = 0 \\ 2 \cdot 2^{(x-1)} & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

مثال ۶.۱.۱. تابع زیر با توجه به تعریف آن بازگشتی اولیه است:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x = 0 \\ x - 1 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

مثال ۷.۱.۱. تابع زیر نیز با توجه به مثال‌های قبل بازگشتی اولیه است:

$$neg(x, y) = \begin{cases} x & \text{if} \quad y = 0 \\ P(neg(x, y-1)) & \text{if} \quad y > 0 \end{cases}$$

مثال ۸.۱.۱. تابع زیر نیز، با توجه به تعریف آن، بازگشتی اولیه است:

$$Sgn(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x = 0 \\ 1 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

تعریف ۹.۱.۱. یک رابطه $R \subseteq \mathbb{N}^k$ را بازگشتی اولیه گوییم اگر تابع مشخصه آن، یعنی:

$$\chi_R(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad R(x_1, \cdots, x_n) \\ 0 & \text{if} \quad \neg R(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

بازگشتی اولیه باشد.

مثال ۱۰.۱.۱. رابطه «کوچکتر بودن» بازگشتی اولیه است، چون تابع مشخصه آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\chi_<(x, y) = Sgn(neg(x, y))$$

تعریف ۱۱.۱.۱. مجموعه توابع «بازگشتي جزئي» کوچکترین مجموعه از توابع است که شامل توابع بازگشتي اولیه بوده و تحت عملگر μ_x (تعریف شده در فوق) بسته باشد.

مثال ۱۲.۱.۱. تابع $f(x) = \lceil\sqrt{x}\rceil$ بازگشتی جزئي است، چون :

$$f(x) = \mu_z(Sgn(z^2 - x) = 0).$$

قضیه ۱۳.۱.۱. *همه گزاره‌هاي زیر در Q قابل اثبات هستند:*

$A: \quad \forall x, y(x + y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0)).$

$B: \quad \forall x, y(x \cdot y = 0 \to (x = 0 \vee y = 0)).$

$C: \quad \forall x(x + \overline{1} = s(x)).$

$D: \quad \forall x(x \geq 0).$

$E: \quad \forall x(s(x) \leq \overline{n+1} \to x \leq \overline{n})$

$F: \quad \forall x(s(x) + \overline{n} = x + \overline{n+1})$

$G: \quad \forall x(x \geq \overline{n} \to (x = \overline{n} \vee x \geq \overline{n+1}))$

برهان. اثبات قسمت A: اگر $y \neq 0$ آنگاه براي یك z مناسب داریم $y = s(z)$ ودرنتیجه:

$$x + y = s(x + z) \neq 0$$

(با توجه به اصل هاي ۱ و ۴).

اثبات قسمت B: فرض کنید $x \neq 0$ و $y \neq 0$. پس براي u و v مناسب داريم $x = s(u)$ و $y = s(v)$. در نتيجه:

$$x \cdot y = s(u) \cdot s(v) = s(u) \cdot v + s(u) = s(s(u) \cdot v + u) \neq 0.$$

اثبات قسمت C:

$$x + \overline{1} = x + s(0) = s(x + 0) = s(x).$$

اثبات قسمت D: اگر $x = 0$ حکم بديهي است و اگر $x \neq 0$ آنگاه براي يك z مناسب داريم $x = s(z)$. پس (بنا بر اصل ۳) داريم $s(z) + 0 = x$. حال از اصل ۸ نتيجه مي‌شود $0 < x$.

اثبات قسمت E: اگر $s(x) = \overline{n+1}$ آنگاه از اصل ۲ نتيجه مي‌شود $x = \overline{n}$ و حکم برقرار است. و اگر $s(x) < \overline{n+1}$ آنگاه براي يك z مناسب داريم:

$$s(z) + s(x) = \overline{n+1}$$
$$\Rightarrow s(s(z) + x) = s(\overline{n})$$
$$\Rightarrow s(z) + x = \overline{n}$$
$$\Rightarrow x < \overline{n}.$$

اثبات قسمت F: به استقرا (در فرا زبان)روي n عمل مي‌كنيم. براي $n = 0$ داريم:

$$s(x) + 0 = s(x) = x + \overline{1}$$

(با توجه به قسمت C). حال فرض کنيم حکم براي n اثبات شده است و اثباتي براي حالت $n + 1$ به دست مي‌آوريم:

$$s(x) + \overline{n+1} = s(x) + s(\overline{n}) = s(s(x) + \overline{n}) = s(x + \overline{n+1}) = x + \overline{n+2}.$$

(در تساوي دوم از اصل ۴ و در تساوي سوم از فرض استقرا استفاده شده است).

اثبات قسمت G: (استدلال درون نظريه Q) فرض کنيم $x \geq \overline{n}$ و $x \neq \overline{n}$. پس براي يك z مناسب داريم $x = s(z) + \overline{n}$ و با توجه به قسمت قبل نتيجه مي‌شود $x = z + \overline{n+1}$، پس $x \geq \overline{n+1}$.
□

قضيه ۱۴.۱.۱. *براي هر $m, n \in \mathbb{N}$ گزاره‌هاي زير در Q قابل اثبات هستند:*

$A: \quad \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}.$

$B: \quad \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{m \cdot n}.$

$C: \quad \overline{m} \neq \overline{n} \ \textit{(if } m \neq n.)$

$D: \quad \forall x (x \leq \overline{n} \leftrightarrow (x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n})).$

$E: \quad \forall x (x \leq \overline{n} \vee x \geq \overline{n}).$

برهان. اثبات قسمت A: به استقرا (در فرا زبان) روي n عمل مي‌كنيم. براي $n = 0$ حكم بلافاصله از اصل ۴ نتيجه مي‌شود. حال فرض كنيم كه حكم براي n اثبات شده است و آن را براي $n+1$ اثبات كنيم:

$$\overline{m} + \overline{n+1} = \overline{m} + s(\overline{n}) = s(\overline{m} + \overline{n}) = s(\overline{m+n}) = \overline{m+n+1}.$$

(در تساوي سوم از فرض استقرا استفاده شده است).

اثبات قسمت B: به استقرا (در فرا زبان) روي n عمل مي‌كنيم. براي $n = 0$ حكم بلافاصله از اصل ۵ نتيجه مي‌شود. حال فرض كنيم كه حكم براي n اثبات شده است و آن را براي $n+1$ اثبات كنيم:

$$\overline{m} \cdot \overline{n+1} = \overline{m} \cdot s(\overline{n}) = \overline{m} \cdot \overline{n} + \overline{m} = \overline{m \cdot n} + \overline{m} = \overline{m \cdot n + m} = \overline{m \cdot (n+1)}.$$

(در تساوي سوم از فرض استقرا و در تساوي چهارم و پنجم از قسمت A استفاده شده است).

اثبات قسمت C: به استقرا (در فرا زبان) روي n عمل مي‌كنيم. بنا بر تقارن مي‌توان فرض كرد كه $m < n$. حالت $n = 0$ غير ممكن است. براي حالت $n = \overline{1}$، m بايد الزاماً برابر 0 باشد و درستي حكم از اصل ۱ نتيجه مي‌شود. حال فرض كنيم كه حكم براي n برقرار بوده و آن را براي $n+1$

ثابت کنیم. اگر $m = 0$ حکم از اصل ۱ نتیجه مي‌شود و اگر $m > 0$ پس $m = m_0 + 1$ (براي يك m_0 مناسب). چون دروواقع $m_0 < n$ پس از فرض استقرا نتیجه مي‌شود $\mathsf{Q} \vdash \overline{m_0} \neq \overline{n}$ و از اصل ۲ نتیجه مي‌شود $\mathsf{Q} \vdash \overline{m_0 + 1} \neq \overline{n+1}$، یعني $\mathsf{Q} \vdash \overline{m} \neq \overline{n+1}$.

اثبات قسمت D: به استقرا (در فرا زبان) روي n عمل مي‌کنیم. قسمت $\leftarrow$ بلافاصله از A نتیجه مي‌شود. پس فقط قسمت $\rightarrow$ را اثبات مي‌کنیم. براي $n = 0$ حکم از قسمت A قضیه ۱۴.۱.۱ نتیجه مي‌شود. پس فرض کنیم $n > 0$. بنابراین $n = s(n_0)$ (براي يك n_0 مناسب). حال در نظریه Q چنین استدلال مي‌کنیم:

اگر $x = 0$ حکم بدیهی است و اگر $x \neq 0$، پس يك z وجود دارد که $x = s(z)$. پس از $x \leq \overline{n+1}$ نتیجه مي‌شود که $z \leq \overline{n}$ و (با توجه به فرض استقرا) $z = 0 \vee \cdots \vee z = \overline{n}$. بنابراین $s(z) = 1 \vee \cdots \vee s(z) = \overline{n+1}$، یعني $x = 1 \vee \cdots \vee x = \overline{n+1}$.

اثبات قسمت E: از قضیه ۱۳.۱.۱ قسمت D نتیجه می‌شود که $\forall x(x \geq 0)$. حال فرض کنیم که $\mathsf{Q} \vdash \forall x(x \geq \overline{n} \vee x \leq \overline{n})$ و درون Q به این صورت استدلال می‌کنیم: اگر $x \leq \overline{n}$ آنگاه $x \leq \overline{n+1}$ و حکم برقرار است. و اگر $x \geq \overline{n}$ آنگاه بنا بر قسمت G قضیه ۱۳.۱.۱ داریم $x = \overline{n}$ یا $x \geq \overline{n+1}$ که در هر دو صورت حکم برقرار است. $\square$

قضیه ۱۵.۱.۱. *برای هر گزاره Δ_0 مانند $\varphi(x)$ (با تنها متغیر آزاد x)، اگر جمله $\exists x \varphi(x)$ در مدل استاندارد حساب درست باشد آنگاه $\mathsf{Q} \vdash \exists x \varphi(x)$*

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر فرمول Δ_0 مانند $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$، اگر $\mathbb{N} \vDash \varphi(\overline{k_1}, \cdots, \overline{k_n})$ آنگاه $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{k_1}, \cdots, \overline{k_n})$. با توجه به قضیه ۱۴.۱.۱، قسمتهای A و B، برای هر ترم $t(x_1, \cdots, x_n)$ و هر $k_1, \cdots, n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\mathsf{Q} \vdash (\overline{k_1}, \cdots, \overline{k_n}) = \overline{Val(t(\overline{k_1}, \cdots, \overline{k_n}))}$$

(برای مثال $\mathsf{Q} \vdash \overline{2} + (\overline{3} * \overline{5}) = \overline{17}$). حال از قضیه ۱۴.۱.۱ نتیجه می‌شود که حکم برای حالت‌هایی که $\varphi(x)$ گزاره‌ای اتمی یا نقیض یک گزاره اتمی باشد برقرار است. (با توجه به این نکته که اگر $\mathbb{N} \vDash \neg(\overline{k} \leq \overline{m})$ آنگاه $m < k$ و با توجه به قضیه ۱۴.۱.۱:

$$\mathsf{Q} \vdash \overline{k} \leq \overline{m} \rightarrow (\overline{k} = 0 \vee \cdots \vee \overline{k} = \overline{m})).$$

به سادگی و با کمک اسقرا می‌شود که حکم برای فرمولهایی که از ترکیب فرمولهای اتمی (یا نقیض اتمی) با کمک رابطهای منطقی به دست می‌آیند نیز برقرار است. در آخر فرض کنیم که فرمول φ به صورت $\exists y \leq x_1 \psi(y, x_2, \cdots, x_n)$ باشد و $\mathbb{N} \vDash \varphi(\overline{k_1}, \cdots, \overline{k_n})$. پس برای یک $k_0 \leq k_1$ داریم $\mathbb{N} \vDash \psi(\overline{k_0}, \overline{k_2} \cdots, \overline{k_n})$. از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $\mathsf{Q} \vdash \psi(\overline{k_0}, \overline{k_2} \cdots, \overline{k_n})$. بنابراین $\mathsf{Q} \vdash \varphi(\overline{k_1}, \overline{k_2} \cdots, \overline{k_n})$. برای گزاره‌هایی که به صورت $\forall y \leq x_1 \psi(y, x_2, \cdots, x_n)$ باشند، حکم به روش مشابه اثبات می‌شود. $\square$

قضیه فوق در واقع نشان می‌دهد که نظریه Q، «Σ_1ـ کامل» است ، یعنی تمام گزاره‌های درست و Σ_1 را اثبات می‌کند.

تعریف ۱.۱.۱۶. گوییم تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ در نظریه T نمایش‌پذیر[۴] است اگر یک فرمول $F(x, y)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $f(m) = n$ اگر و فقط اگر $T \vdash \forall y(y = \overline{n} \leftrightarrow F(\overline{m}, y))$.

می‌توان ثابت کرد که همه توابع بازگشتی در نظریه Q نمایش‌پذیر هستند ([۵]).

«مدل استاندارد حساب»[۵]، یعنی مدلی که دامنه آن اعداد طبیعی و همه نمادهای $0, \mathrm{s}, +, \cdot, <$ به صورت عادی تعبیر می‌شوند، را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. منظور از $\mathbb{N} \vDash \varphi$ این است که φ در مدل استاندارد درست است. نتیجه زیر، که به لم قطری[۶] معروف است، نقش مهمی در اثبات قضیه گودل و بسیاری نتایج دیگر دارد:

لم ۱.۱.۱۷. *برای هر فرمول $A(x)$ (با تنها متغیر آزاد x)، یک جمله ψ وجود دارد به طوری که:*

$$Q \vdash \psi \leftrightarrow A(\ulcorner \psi \urcorner).$$

[۴] representable

[۵] standard model of arithmetic

[۶] diagonal lemma

برهان. برای هر فرمول A «قطری سازی»[۷] فرمول A را برابر فرمول $\exists x(x = \ulcorner A \urcorner \wedge A)$ تعریف می‌کنیم. دقت کنید که اگر A فرمولی با تنها متغیر آزاد x باشد آنگاه فرمول فوق در واقع معادل $A(\ulcorner A \urcorner)$ می‌باشد. ولی البته برای هر فرمول دلخواه قطری سازی آن خوش تعریف است. به سادگی می‌توان نشان داد که یک تابع بازگشتی اولیه $diag$ وجود دارد که عدد گودل قطری سازی شده یک فرمول دلخواه را محاسبه می‌کند. چون $diag$ بازگشتی اولیه است پس در هر نظریه $T \supseteq \mathsf{Q}$ نمایش پذیر است. فرض کنیم $Diag(x, y)$ فرمولی باشد که $diag$ را در نظریه T نمایش می‌دهد. پس برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ اگر $diag(m) = n$ آنگاه $T \vdash \forall y(Diag(\overline{m}, y) \leftrightarrow y = \overline{n})$. فرض کنید $B(x)$ فرمول $\exists y(Diag(x, y) \wedge A(y))$ باشد. فرض کنید b عدد گودل فرمول $B(x)$ باشد. گزاره G را برابر $\exists x(x = \overline{b} \wedge B(x))$ قرار می‌دهیم که به طور منطقی معادل $B(\overline{b})$ است. از $B(\overline{b})$ نتیجه می‌شود $A(\overline{c})$ که در آن c عددی است که در شرط $diag(b) = c$ صدق می‌کند. ولی c همان عدد گودل فرمول G می‌شد. پس $A(\ulcorner G \urcorner)$. برعکس: اگر $A(\ulcorner G \urcorner)$ آنگاه $\exists y(Diag(\overline{b}, y) \wedge A(x))$ و در نتیجه $\exists x(x = \overline{b} \wedge \exists y(Diag(x, y) \wedge A(x)))$ که همان G می‌باشد $\square$

در بعضی موارد به صورت تعمیم یافته این لم نیز نیاز داریم (که به صورت «پارامتری» لم قطری معروف است):

لم ۱۸.۱.۱. *برای هر فرمول $A(x, y_1, \cdots, y_n)$ (با متغیر های آزاد x و $y_1, \cdots, y_n$)، یک فرمول $\psi(y_1, \cdots, y_n)$ وجود دارد به طوری که:*

$$Q \vdash \forall y_1, \cdots, y_n \left[\psi(y_1, \cdots, y_n) \leftrightarrow A(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, y_1, \cdots, y_n)\right].$$

حساب پئانو (PA) از اضافه کردن اصول استقرا به حساب رابینسون به دست می‌آید. برای هر فرمول φ، اصل استقرای مربوط به صورت زیر است:

$$\forall x\left[\varphi(x) \to \varphi(\mathtt{s}(x))\right] \to \left[\varphi(0) \to \forall x \varphi(x)\right].$$

[۷] diagonalization

سلسه مراتب حسابی[۸] به روش استاندارد تعریف می‌شود، یعنی $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ مجموعه فرمولهایی است که در آن همه سورها محدود هستند (یعنی به صورت $\forall x < t(...)$ یا $\exists x < t(...)$ می‌باشند، که در آن t یک ترم است؛ به این فرمولها، «فرمول های کراندار»[۹] هم می‌گوییم) و Σ_{n+1} مجموعه فرمولها به صورت $\exists x_1 \cdots \exists x_i A$ است که در آن A یک فرمول Π_n است و Π_{n+1} مجموعه فرمولها به صورت $\forall x_1 \cdots \forall x_i A$ است که در آن A یک فرمول Σ_n میباشد. می‌توان در PA ثابت کرد که کلاس‌های Π_n و Σ_n تحت سور های کراندار بسته هستند، یعنی مثلاً اگر $\exists x \varphi(x, y)$ یک فرمول Σ_n باشد، آنگاه $\forall y < t \exists x \varphi(x, y)$ را نیز می‌توان به صورت یک فرمول Σ_n نوشت ([۱۱]). برای همه نظریه‌های متداول حساب یک محمول Δ_0 مانند $\texttt{Proof}_T(y, x)$ وجود دارد که بیان می کند y عدد گودل یک اثبات (در نظریه T) برای فرمول با عدد گودل x است. «محمول اثبات پذیری»[۱۰] برای نظریه T به صورت $\texttt{Pr}_T(x) \equiv \exists y \texttt{Proof}_T(y, x)$ تعریف می‌شود. برای یک نظریه در زبان حساب، «ωـ سازگاري» به صورت زیر تعریف مي‌شود:

تعریف ۱.۱.۱۹. يك نظريه T را «ωـ سازگار» گوييم اگر فرمولي مانند $\varphi(x)$ وجود نداشته باشد به طوري كه براي هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشيم $T \vdash \varphi(\overline{n})$ و در عين حال $T \vdash \exists x \neg \varphi(x)$.

تعریف ۱.۱.۲۰. نظريه T را «nـ سازگار» گوييم اگر فرمولي مانند $\varphi(x) \in \Pi_{n-1}$ وجود نداشته باشد به طوري كه $T \vdash \exists x \varphi(x)$ و در عين حال براي هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشيم $T \vdash \neg \varphi(\bar{i})$.

مفهوم nـ سازگاری همان ωـ سازگاری است که به فرمولهای Σ_n محدود شده است.

بنابر قضیه معروفی از تارسکی[۱۱] مفهوم درستی (در مدل استاندارد حساب) در زبان حساب قابل تعریف نیست. به عبارت دقیق:

قضیه ۱.۱.۲۱. *محمولي مانند $Tr(x)$ در زبان حساب وجود ندارد به طوری که برای هر جمله φ داشته باشیم $\mathbb{N} \vDash Tr(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \varphi$.*

---

[۸] arithmetical hierarchy

[۹] bounded formula

[۱۰] provability predicate

[۱۱] A. Tarski

برهان. فرض كنيم چنين محمولي وجود داشته باشد. با كمك لم قطري، جمله α را طوري مي‌سازيم كه $\mathsf{Q} \vdash \alpha \leftrightarrow Tr(\ulcorner\alpha\urcorner)$. چون Q يك نظريه درست است (يعني همه اصول آن در مدل استاندارد حساب درست هستند)، پس:

$$\mathbb{N} \vDash \alpha \leftrightarrow \neg Tr(\ulcorner\alpha\urcorner). \tag{۱.۱}$$

حال به اين صورت استدلال مي‌كنيم: اگر $\mathbb{N} \vDash \alpha$ آنگاه از (۱.۱) نتيجه مي‌شود $\mathbb{N} \vDash \neg Tr(\ulcorner\alpha\urcorner)$ و در نتيجه (بنا بر تعريف محمول Tr) بايد داشته باشيم: $\mathbb{N} \vDash \alpha$ كه يك تناقض است. و اگر $\mathbb{N} \vDash \neg\alpha$ آنگاه مجدداً از (۱.۱) نتيجه مي‌شود كه $\mathbb{N} \vDash Tr(\ulcorner\alpha\urcorner)$، در نتيجه $\mathbb{N} \vDash \alpha$ كه دوباره يك تناقض است. $\square$

ولی اگر موضوع را به فرمولهای
Σ_n (یا Π_n) محدود کنیم، مفهوم درستی تعریف پذیر می‌شود:

لم ۲۲.۱.۱. *برای هر $n \geq 1$ یک محمول Σ_n-**True**(x) وجود دارد به طوری که برای هر فرمول Σ_n مانند φ داریم:*

$$\mathit{PA} \vdash \Sigma_n\text{-}\mathbf{True}(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi.$$

*خاصيتي مشابه برای فرمول های Π_n نیز برقرار است. ضمناً براي هر $n \geq 1$، Σ_n-**True**(x) خود فرمولی Σ_n و Π_n-**True**(x) خود فرمولی Π_n است (برای اثبات، گزاره ۱۰۷۶ از مرجع [۵] را ببینید).*

۲.۱ نظریه محاسبه‌پذيري

یک شمارش استاندارد از ماشین‌های تورینگ را با $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \cdots$ نشان می‌دهیم. در بعضي موارد از شمارش استانداردي استفاده مي‌كنيم كه در آن ابتدا همه ماشين‌هاي با يك دستورالعمل ظاهر مي‌شوند، سپس همه ماشين‌ها با دو دستورالعمل و الي آخر. نماد $\mathcal{M}_i(a) \downarrow = b$ به اين معنی

است که ماشین تورینگ $\mathcal{M}_i$ با ورودی a متوقف شده و b را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. دنباله تهی را با نماد $\boldsymbol{\lambda}$ نشان می‌دهیم و $\mathcal{M}_i(\boldsymbol{\lambda}) \downarrow= b$ به این معنی است که ماشین $\mathcal{M}_i$ بدون دریافت ورودی (یعنی با اجرا بر روی نوار خالی) متوقف شده و خروجی b را تحویل می‌دهد.

در این رساله، تمام ماشین‌هاي تورینگ روی مجموعه نماد $\{0, 1, \mathbf{B}\}$ هستند (نماد $\mathbf{B}$ جای خالی را نمایش مي‌دهد). دستورالعمل‌های ماشین تورینگ به صورت $q_i\ s_j\ s_k\ q_l\ X$ هستند که در آن $X \in \{\mathbf{R}, \mathbf{L}\}$. معنی این دستور این است که اگر ماشین در وضعیت درونی q_i نماد s_j را مشاهده کرد، آنگاه نماد s_k را به جای آن نوشته، وضعیت درونی ماشین را به q_l تغییر داده و سرك [۱۲] ماشین را به سمت راست (اگر $X = \mathbf{R}$) و یا به سمت چپ (اگر $X = \mathbf{L}$) حرکت می‌دهد.

دو ماشین تورینگ که فقط با یک تغییر نام حالت‌های درونی قابل تبدیل به یکدیگر هستند را یکسان در نظر می‌گیریم. برای مثال دو ماشین $\{q_1\ \mathbf{B}\ 1\ q_1\ \mathbf{R}\}$ و $\{q_5\ \mathbf{B}\ 1\ q_5\ \mathbf{R}\}$ یکسان هستند. وقتی می‌نویسیم $\mathcal{M}_i(x) = \mathcal{M}_j(x)$ منظور این است که یا هر دو ماشین با ورودی x متوقف شده و خروجی یکسانی را تحویل می‌دهند، یا هیچکدام متوقف نمی‌شوند. به صورتی استاندارد می‌توان ماشین‌های تورینگ را با دنباله هایی دودویی متناهی (دنباله های متناهی از صفر و یک) رمزنگاري کرد. اگر m_i دنباله دودویی متناظر ماشین $\mathcal{M}_i$ باشد، طول دنباله m_i را «طول» آن ماشین می‌نامیم و با $|\mathcal{M}_i| = |m_i|$ نمایش می‌دهیم. بنا بر قضیه معروفی از کلینی[۱۳] یک محمول Δ_0 مانند $\boldsymbol{\tau}(i, x, s)$ وجود دارد که بیان می‌کند ماشین تورینگ با کد i و ورودی x متوقف شده و s عدد گودل این محاسبه است ([۲۵] را ببینید). با کمی تغییر در این محمول، می‌توان فرض کرد i اندیس ماشین در یک شمارش استاندارد است.

قضیه ۱.۲.۱. *یک «ماشین تورینگ جهانی»[۱۴] مانند $\mathcal{U}$ وجود دارد به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر دنباله دودویی k داریم:*

$$\mathcal{U}(0^{|m_i|}1m_ik) = \mathcal{M}_i(k).$$

(به عبارت دیگر، ماشین $\mathcal{U}$ با گرفتن کد یک ماشین و یک ورودی، عمکرد آن ماشین را شبیه سازی

[۱۲] head

[۱۳] S. Kleene

[۱۴] universal Turing machine

می‌کند. در اینجا $0^{|m_i|}$ دنباله‌ای از $|m_i|$ تا 0 متوالی است و $0^{|m_i|}1m_ik$ نشان دهنده دنباله‌ای است که از پشت سر هم قرار دادن $0^{|m_i|}$، 1، m_i و k به دست می‌آید).

«ماشین تورینگ اراکل دار»[15] به شیوه معمول (مطابق مرجع [۲۵]) تعریف می‌شود. تفاوت این ماشین‌ها با ماشین تورینگ معمولي در این است که داراي دو نوار هستند؛ یکي مانند ماشین تورینگ معمولي براي انجام محاسبات (نوشتن و پاك كردن) اختصاص دارد و بر روي نوار دیگر تابع مشخصه یك مجموعه A، كه آن را «اراكل» مي‌ناميم، نوشته شده است. نوار مربوط به اراكل فقط براي خواندن است و ماشین نمي‌تواند بر روي آن بنویسد. دستورهاي این ماشین‌ها به صورت $q_i\ s_j\ s_k\ s_l\ q_m\ X$ مي‌باشد. این دستورها به این صورت عمل مي‌كنند:
اگر ماشین در وضعیت دروني q_i بود و نماد s_j در مقابل سرك ماشین قرار داشت و نماد s_k در مقابل سرك مربوط به نوار اراكل، آنگاه نماد s_l را به جاي s_j در نوار ماشین بنویس، حالت دروني را به q_m تغییر بده و هر دو سرك را به سمت راست (اگر $X = \mathbf{R}$) و یا به سمت چپ (اگر $X = \mathbf{L}$) حركت بده.

اگر ماشین تورینگ اراكل دار $\mathcal{M}_i$ كه از مجموعه A به عنوان اراكل استفاده مي‌كند، با ورودي a متوقف شده و b را به عنوان خروجي تحویل دهد، مي‌نویسیم $\mathcal{M}_i^A(a) \downarrow = b$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض كنید $A, B \subseteq \mathbb{N}$. گوییم مجموعه A «تقلیل پذیر تورینگ»[16] به مجموعه B است، اگر یك ماشین تورینگ اراكل دار $\mathcal{M}_i$ وجود داشته باشد به طوري كه این ماشین با داشتن B به عنوان اراكل، تابع مشخصه مجموعه A را محاسبه كند. در این صورت مي‌نویسیم $A \leq_T B$. اگر $A \leq_T B$ و $B \leq_T A$ هر دو برقرار باشند، آنگاه A و B را «هم‌ارز تورینگ»[17] گوییم و مي‌نویسیم $A \equiv_T B$.

تعریف ۳.۲.۱. «درجه تورینگ»[18] یك مجموعه $A \subseteq \mathbb{N}$ (كه با نماد $deg_T(A)$ نشان مي‌دهیم) برابر مجموعه زیر تعریف مي‌شود:

[15] oracle Turing machine

[16] Turing reducable

[17] Turing equivalent

[18] Turing degree

$\{X \subseteq \mathbb{N} \ : \ X \equiv_T A\}$.

«مسئله توقف»[۱۹] عبارت است از اینکه براي يك ماشين تورينگ و يك ورودي داده شده، آيا ماشين متوقف مي‌شود يا خير.

قضیه ۴.۲.۱. *مسئله توقف «حل‌پذیر» نیست، یعني الگوريتمي وجود ندارد كه با داشتن انديس يك ماشين تورينگ $\mathcal{M}_i$ و يك ورودي a مشخص كند كه $\mathcal{M}_i(a)\downarrow$ يا خير.*

برهان. فرض كنيم چنين نباشد. پس يك ماشين تورينگ $\mathcal{M}_{\boldsymbol{j}}$ وجود دارد به طوري كه براي هر i و a، اگر $\mathcal{M}_i(a)\downarrow$ آنگاه $\mathcal{M}_{\boldsymbol{j}}(i,a)=1$ و در غير اين صورت $\mathcal{M}_{\boldsymbol{j}}(i,a)=0$. حال تابع f را به اين صورت تعريف مي‌كنيم: اگر $\mathcal{M}_{\boldsymbol{j}}(i,i)=0$ آنگاه قرار مي‌دهيم $f(i)=0$ و اگر $\mathcal{M}_{\boldsymbol{j}}(i,i)=1$ قرار مي‌دهيم $f(i)=\mathcal{M}_i(i)+1$. واضح است كه تابع f محاسبه‌پذیر است. فرض كنيم $\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}$ ماشين تورينگي باشد كه f را محاسبه مي‌كند. اگر $\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k})\uparrow$ آنگاه $\mathcal{M}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})=0$ و در نتيجه $\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k})\downarrow=0$، تناقض. و اگر $\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k})\downarrow$ آنگاه $\mathcal{M}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})=1$، بنابراين $f(\boldsymbol{k})=\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k})=\mathcal{M}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k})+1$، و در نتيجه $0=1$، تناقض. $\square$

درجه تورينگ مسئله توقف، كه معادل درجه تورينگ مجموعه $\{i\in\mathbb{N} \ : \ \mathcal{M}_i(i)\downarrow\}$ است را با نماد $0'$ نشان مي‌دهيم. 0 نيز نشان دهنده درجه تورينگ[۲۰] مجموعه توابع محاسبه پذير و $0^{(n)}$ نشان دهنده nامين جهش تورينگ[۲۱] درجه 0 می‌باشد كه مطابق زير تعريف مي‌شود:

تعریف ۵.۲.۱. براي هر درجه تورينگ a، «جهش تورينگ» اين درجه، كه با نماد a' نشان داده مي‌شود، برابر درجه تورينگ مجموعه $\{i\in\mathbb{N} \ : \ \mathcal{M}_i^A(i)\downarrow\}$ تعريف مي‌كنيم ($A\subseteq\mathbb{N}$ يك مجموعه دلخواه با درجه تورينگ a است).

(براي اطلاعات بيشتر سه فصل اول مرجع [۲۵] را ببينيد). دامنه تعريف ماشين $\mathcal{M}_i$ را با $\mathcal{W}_i$ نشان مي‌دهيم. يك مجموعه $A\subseteq\mathbb{N}$ را شمارش‌پذير بازگشتي[۲۲] (RE) گوييم اگر يك $i\in\mathbb{N}$

[۱۹] halting problem

[۲۰] Turing degree

[۲۱] Turing jump

[۲۲] recursively enumerable

وجود داشته باشد که $A = \mathcal{W}_i$. واضح است که $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \cdots, \mathcal{W}_n, \cdots$ يك شمارش از همه مجموعه‌هاي RE مي‌باشد.

تعريف ۱.۲.۶. يك مجموعه RE مانند A را «خلاق»[۲۳] گوييم اگر تابع محاسبه‌پذير f وجود داشته باشد به طوري كه:

$$\forall i\ : \mathcal{W}_i \subseteq \overline{A} \to f(i) \in \overline{A} - \mathcal{W}_i$$

(نماد $\overline{A}$ نشان دهنده مكمل مجموعه A است).

مثالي از يك مجموعه خلاق، مجموعه $K = \{i : \ \mathcal{M}_i(i)\downarrow\}$ مي‌باشد (موسوم به مجموعه كانتور[۲۴])، چون براي هر $\mathcal{W}_i \subseteq \overline{K}$، داريم:

$$i \in \mathcal{W}_i \leftrightarrow (\mathcal{M}_i(i)\downarrow) \leftrightarrow i \notin \overline{K}$$

و در نتيجه $i \in \overline{K} - A$.

قضيه ۱.۲.۷. *(قضيه اول ناتماميت گودل) براي هر نظريه RE مانند T كه شامل Q و ωـ سازگار باشد، يك گزاره G وجود دارد كه از T مستقل است (يعني نه خود و نه نقيض آن در T قابل اثبات نيستند).*

برهان. با كمك لم قطري سازي گزاره G را به طوري مي‌سازيم كه:

$$\mathsf{Q} \vdash \leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner). \qquad (۱.۲)$$

نشان مي‌دهيم كه G از نظريه T مستقل است. اگر $T \vdash G$ آنگاه با توجه به اينكه $\mathtt{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ يك گزاره درست و Σ_1 است و T شامل Q است، داريم $T \vdash \mathtt{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$. ولي از (۱.۲) نتيجه مي‌شود:

[۲۳] creative

[۲۴] Cantor set

$T \vdash \neg \mathtt{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ و از دو نتیجه آخر نتیجه مي‌شود که T ناسازگار است، تناقض. پس ثابت کردیم $T \nvdash G$. اگر $T \vdash \neg G$ آنگاه با توجه به تعریف G داریم:

$$T \vdash \mathtt{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner). \tag{۳.۱}$$

از فرض $T \vdash \neg G$ و سازگار بودن T نتیجه مي‌شود که $T \nvdash G$. پس براي هر $n \in \mathbb{N}$، $\neg \mathtt{Proof}_T(\overline{n}, \ulcorner G \urcorner)$ يك گزاره Σ_1 و درست، و در نتیجه اثبات پذیر در T است، یعني براي هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$T \vdash \neg \mathtt{Proof}_T(\overline{n}, \ulcorner G \urcorner). \tag{۴.۱}$$

حال از (۴.۱) و (۳.۱) نتیجه مي‌شود که نظریه T، ωـ سازگار نیست، تناقض. □

در پایان يك اثبات از قضیه اول ناتمامیت با استفاده از مفاهیم نظریه محاسبه پذیري، که منسوب به کلیني است، را ارایه مي‌کنیم:

قضیه ۸.۲.۱. *براي هر نظریه RE و درست در زبان حساب مانند $Q \subseteq T$ يك گزاره به صورت $\mathcal{M}_i(i)\uparrow$ وجود دارد که مستقل از T مي‌باشد.*

برهان. مجموعه (اعداد گودل) گزاره‌هاي به صورت $\mathcal{M}_i(i)\uparrow$ که در نظریه T قابل اثبات هستند يك مجموعه RE است. این مجموعه را با $\mathcal{W}_j$ نشان مي‌دهیم. چون T شامل Q است، پس تمام گزاره‌هاي درست به صورت $\mathcal{M}_i(i)\downarrow$ را اثبات مي‌کند (چون همه این گزاره‌ها، Σ_1 هستند). درنتیجه هیچ گزاره نادرست به صورت $\mathcal{M}_i(i)\uparrow$ در نظریه T قابل اثبات نیست (چون در غیر این صورت، نقیض آن گزاره، که گزاره‌اي Σ_1 و درست است، نیز در T قابل اثبات خواهد بود که خلاف فرض سازگاري T است). بنابراین $\mathcal{W}_j \subseteq \overline{K}$. با توجه به استدلالي که در فوق براي خلاق بودن مجموعه K ارایه کردیم، $j \in \overline{K} - \mathcal{W}_j$ و درنتیجه $\mathcal{M}_j(j)\uparrow$ گزاره‌اي درست است که در نظریه T قابل اثبات نیست. از فرض درست بودن T نتیجه مي‌شود که نقیض این گزاره هم در T قابل اثبات نیست. □

فصل ۲

بررسی امکان ساختاری شدن اثبات‌های بولوس و شایتین برای قضیه اول ناتمامیت

۱.۲ مقدمه

برهان اولیه گودل براي قضيه ناتماميت بر اساس ساخت گزاره‌اي است كه به طور شهودي مي‌گويد «من اثبات پذير نيستم». به بيان دقيق، با كمك لم قطري‌سازي يك گزاره G ساخته مي‌شود به طوري كه $\mathtt{PA} \vdash G \longleftrightarrow \neg\mathtt{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$. حال به سادگي مي‌توان نشان داد كه اگر T سازگار باشد، آنگاه $T \nvdash G$ و اگر T ωـ سازگار باشد، آنگاه $T \nvdash \neg G$. در قضيه دوم ناتماميت نشان داده مي‌شود كه $T \vdash \mathtt{Con}(T) \to G$ كه $\mathtt{Con}(T) \equiv \forall z(\neg\mathtt{Proof}_T(z, \ulcorner 0 = 1 \urcorner))$ گزاره‌اي است كه سازگاري T را بيان مي‌كند و از اينجا بلافاصله نتيجه مي‌شود كه $T \nvdash \mathtt{Con}(T)$.

همان طور كه خود گودل هم اشاره مي‌كند، گزاره‌اي كه در اين استدلال مورد استفاده قرار مي‌گيرد، به نوعي، صوري شده پارادكس معروف دروغگو[1] است:

«شباهت اين نتيجه با پارادكس ريچارد كاملا روشن است، همچنين رابطه نزديكي با پارادكس دروغگو دارد» [۴].

[1] liar paradox

این پارادکس در مورد جمله‌اي است که مي‌گويد «اين جمله نادرست است». اگر اين جمله را درست فرض کنيم نتيجه مي‌شود که همين جمله نادرست است و اگر نادرستي آن را بپذيريم بلافاصله درستي آن نتيجه مي‌شود! گودل در همان نخستين مقاله‌اي که در مورد ناتماميت منتشر کرد ([۴])، به اين موضوع اشاره مي‌کند که به جاي پارادکس دروغگو مي‌توان از پارادکس‌هاي ديگر هم براي اثبات پديده ناتماميت استفاده کرد: «...هر پارادکس مربوط به شناختشناسي[۲] ديگر هم مي‌تواند براي اثبات مشابهي براي تصميم ناپذيري مورد استفاده قرار گيرد». اين نکته چندين دهه مورد توجه قرار نگرفت، تا اينکه در دهه‌هاي ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ اثباتهايي از قضيه (اول) ناتماميت کشف شد که نه بر مبناي پارادکس دروغگو بلکه بر اساس پارادکس بِري[۳] قرار داشتند. اين اثباتها توسط شايتين[۴] و بولوس[۵] کشف شدند. قبل از ادامه بحث لازم است پارادکس بِري را توضيح دهيم. اين پارادکس در مورد جمله زير است:

«کوچکترين عددي که توسط هيچ جمله اي با طول حداکثر چهارده کلمه تعريف نمي‌شود».

تعداد جملاتي که حداکثر ۱۴ کلمه دارند متناهي است، پس فقط تعداد متناهي عدد با اين جملات تعريف مي‌شوند. در نتيجه به نظر مي‌رسد جمله فوق بايد يك عدد منحصر به فرد مانند n_0 را تعريف کند. ولي با کمي دقت متوجه مي‌شويم که اين جمله خود ۱۳ کلمه دارد، يعني n_0 خود توسط يك جمله با تعداد کلمات کمتر از ۱۴ کلمه تعريف شده! و اين يك تناقض ايجاد مي‌کند. نخستين اثباتي که استدلال آن به نوعي شبيه به پارادکس بري است توسط شايتين و با استفاده از مفهوم پيچيدگي کولموگوروف[۶] ارايه شد. پيچيدگي کولموگروف يك دنباله w معمولاً به عنوان طول کوچکترین ورودی j برای یک ماشین تورینگ جهانی مانند $\mathcal{U}$ تعریف می‌شود به طوری که $\mathcal{U}$ با دريافت ورودي j، دنباله w را در خروجي چاپ کند. به عبارت ديگر:

$$\mathcal{K}_{\mathcal{U}}(w) = min\{\ |j|\ :\ \mathcal{U}(j)\downarrow= w\} \qquad (۱.۲)$$

[۲] epistemology

[۳] Berry paradox

[۴] G. Chaitin

[۵] G. Boolos

[۶] Kolmogorov complexity

(نماد $|j|$ نشان دهنده طول دنباله j است). با در نظر گرفتن یک ماشین تورینگ جهانی ثابت، پیچیدگی کولموگوروف w را به طور ساده با $\mathcal{K}(w)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۱. (*شایتین*) *براي هر نظریه سازگار و* RE *مانند* $T \supseteq \texttt{PA}$ *یك مقدار ثابت* d_T *وجود دارد که براي هر* $e \geqslant d_T$ *و هر* w *داریم:* $T \nvdash \mathcal{K}(w) \geqslant e$. *ضمناً اگر فرض کنیم که* T *درست نیز هست، آنگاه تمام گزاره هاي درست (درمدل استاندارد) به صورت* $\mathcal{K}(w) \geqslant e$ *(که در آن* $e \geqslant d_T$*) مستقل از* T *هستند (یک نظریه را «درست» [۷] گوییم اگر همه اصول آن در مدل استاندارد حساب درست باشند).*

برهان. چون نظریه T شمارش پذیر کارامد (RE) است، پس یك ماشین تورینگ وجود دارد که قضیه‌هاي T را شمارش مي‌کند و مي‌توان ماشین تورینگي ساخت که الگوریتم زیر را اجرا کند:

قضیه‌هاي T را شمارش کن و هر زمان که قضیه‌اي به صورت $\mathcal{K}(x) > m$ اثبات شد، x را در خروجي چاپ کن و متوقف شو.

(در این الگوریتم، m یك عدد طبیعي ثابت است).

چون طول نمایش دودویي عدد m برابر $\lceil log_2(m+1) \rceil$ است، پس یک ماشین تورینگ جهاني براي اجراي این الگوریتم به یك ورودي به طول $\lceil log_2(m+1) \rceil + c$ نیاز دارد (c مقداري ثابت). فرض کنیم که این ماشین بالاخره پس از اجرا متوقف شود، یعني w موجود باشد که گزاره $\mathcal{K}(w) > m$ در T قابل اثبات باشد. خروجي ماشین را با $\boldsymbol{w}$ نشان مي‌دهیم. با توجه به ملاحظه فوق، پیچیدگی کولموگوروف $\boldsymbol{w}$ کمتر یا مساوی $\lceil log_2(m+1) \rceil + c$ می‌باشد. پس داریم:

$$T \vdash \mathcal{K}(\boldsymbol{w}) \leq \overline{\lceil log_2(m+1) \rceil + c} \tag{۲.۲}$$

(چونکه $\mathcal{K}(\boldsymbol{w}) \leq \overline{\lceil log_2(m+1) \rceil + c}$ یك گزاره Σ_1 و درست مي‌باشد و $T \supseteq \texttt{PA}$، پس در T قابل اثبات است). روشن است که برای m های به اندازه کافي بزرگ داریم:

$$\lceil log_2(m+1) \rceil + c < m$$

[۷] sound

(چون $\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\lceil log_2(m+1)\rceil+c}=+\infty$). در واقع اگر d_T کوچکترین جواب صحیح نامعادله

$$\lceil log_2(x+1)\rceil + c < x$$

باشد، مي‌توان m را بزرگتر يا مساوی d_T در نظر بگيريم و براي چنين mهايي از (۲.۲) نتيجه مي‌شود كه $T\vdash \mathcal{K}(\boldsymbol{w})\leq \overline{m}$ ولي با توجه به فرض ما در مورد $\boldsymbol{w}$، $T\vdash \mathcal{K}(\boldsymbol{w})>\overline{m}$ و اين با نتيجه قبلي متناقض است. پس براي m هاي به اندازه كافي بزرگ، هيچ گزاره‌اي به صورت $\mathcal{K}(x)>\overline{m}$ در T قابل اثبات نيست. از فرض درست بودن نظريه T نتيجه مي‌شود كه نقيض هيچ گزاره درست به صورت $\mathcal{K}(x)>\overline{m}$ هم در T قابل اثبات نيست. $\square$

دومين اثبات بر اساس پارادكس بري توسط جورج بولوس ارايه شد ([۲]). در اينجا يك صورت از اين اثبات كه در ([۱۳]) ارايه شده است را بيان مي‌كنيم.

گوييم يك فرمول $\varphi(x)$ (با تنها متغير آزاد x) «عدد n را در نظريه T تعريف مي‌كند» اگر:

$$T\vdash \forall x[\varphi(x)\leftrightarrow x=\overline{n}]$$

عدد گودل فرمول $\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow x=\overline{n})$ را با $\mathtt{D}(\ulcorner\varphi\urcorner,n)$ نشان مي‌دهيم. در اينجا T يك نظريه ۱ــ سازگار و شامل PA مي‌باشد. قرار دهيد:

$$\mathtt{Df}_T(x,y)\equiv \exists z[\mathtt{length}(z)\leq y\wedge \mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z,x))]$$

($\mathtt{length}(x)$ يك تابع بازگشتي اوليه است كه طول يك فرمول را محاسبه مي‌كند). فرمول $\mathtt{Df}_T(x,y)$ در واقع بيان مي‌كند كه عدد x با فرمولي به طول كمتر يا مساوي y قابل تعريف است. قرار مي‌دهيم:

$$\mathtt{B}_T(x,y)\equiv(\neg\mathtt{Df}_T(x,y)\wedge\forall z<x\mathtt{Df}_T(z,y))$$

معناي اين فرمول اين است كه x كوچكترين عددي است كه با فرمول‌هاي با طول كمتر يا مساوي y قابل تعريف نيست. طول اين فرمول را با k_T نشان مي‌دهيم. حال فرمول

$$\mathtt{S}_T(x) \equiv \exists t(\mathtt{B}_T(x,t) \wedge t = \overline{10} \times \overline{k_T})$$

را در نظر بگيريد. به سادگي ملاحظه مي‌شود كه طول اين فرمول كمتر از $10k_T$ است (چون طول $\mathtt{S}_T$ برابر است با طول $\mathtt{B}_T$ بعلاوه نمادهايي كه براي نوشتن $\overline{10} \times \overline{k_T}$ و قسمت باقي‌مانده فرمول $\mathtt{S}_T(x)$ لازم است، يعني در مجموع $4k_T + 40$ نماد. پس، با حل يك نامعادله ساده، ملاحظه مي‌شود كوچكتر بودن طول اين فرمول از $10k_T$ معادل $k_T \geq \frac{40}{6}$ است كه آن هم به طور بديهي برقرار است). پس اگر n_T كوچكترين عددي باشد كه با فرمولهاي با طول كمتر يا مساوي $10k_T$ قابل تعريف نيست، آنگاه:

$$\mathbb{N} \vDash \neg\mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$$

پس:

$$T \nvdash \mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$$

(چون T يك نظريه ۱ ـ سازگار است و $\mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ يك Σ_1 گزاره نادرست است). ضمناً $\neg\mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ نيز در T قابل اثبات نيست، چون اگر $T \vdash \neg\mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ آنگاه:

$$T \vdash \neg\mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T}) \wedge \forall z < \overline{n_T}\ \mathtt{Df}_T(z, \overline{10} \times \overline{k_T})$$

چون T یک نظریه Σ_1 تمام است و $\forall z < \overline{n_T}\ \mathtt{Df}_T(z, \overline{10} \times \overline{k_T})$ معادل گزاره‌ای Σ_1 و درست است. در نتیجه $T \vdash \mathtt{S}_T(\overline{n_T})$. به سادگی ملاحظه می‌شود که $\mathtt{PA} \vdash \forall x, y[(\mathtt{S}_T(x) \wedge \mathtt{S}_T(y)) \rightarrow x = y]$، بنابراین $T \vdash \mathtt{S}_T(\overline{n_T}) \wedge \forall z, y[(\mathtt{S}_T(z) \wedge \mathtt{S}_T(y)) \rightarrow z = y]$ و درنتیجه $T \vdash \forall x[\mathtt{S}_T(x) \leftrightarrow x = \overline{n_T}]$. پس فرمول $\mathtt{S}_T(x)$ عدد n_T را در نظریه T تعریف می‌کند. اما طول $\mathtt{S}_T(x)$ کمتر از $10k_T$ است. بنابراین $T \vdash \mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ که با سازگاری T در تناقض است.

۲.۲ عدم امکان ساختاری شدن برهان بولوس

توجه کنید که اثبات بولوس (ارایه شده در فصل قبل) ساختاری نیست، چون نحوه محاسبه n_T (و در نتیجه جمله تصمیم‌ناپذیر $(\neg\mathtt{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10}\times\overline{k_T})$) را نمی‌گوید. حال این سوال به طور طبیعي مطرح مي‌شود: آیا مي‌توان n_T را به شیوه‌اي محاسبه پذیر از توصیف نظریه T به دست آورد؟ این سوال را مي توان به روش هاي مختلفي صورتبندي کرد. صورت زیر شاید طبیعي‌ترین باشد:

سوال ۱: آیا تابع محاسبه پذیر f وجود دارد به طوري که براي هر نظریه ۱ـ سازگار مانند:

$$T = \mathtt{PA} + \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$$

داشته باشیم $f(\ulcorner(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)\urcorner)\downarrow = n_T$ ؟

در ادامه ثابت مي‌کنیم که تابع f (با تعریف بالا) محاسبه پذیر نیست.

تعریف ۱.۲.۲. دنباله $T_0, T_1, ..., T_n, ...$ را یك «دنباله بازگشتي از نظریه هاي RE» گوییم اگر همه T_i ها RE بوده و یك تابع محاسبه پذیر $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوري که $\mathcal{M}_{v(n)}$ مجموعه (اعداد گودل) اصول نظریه T_n را شمارش کند.

لم ۲.۲.۲. *اگر $T_0, T_1, \cdots, T_n, \cdots$ یك دنباله بازگشتي از نظریه هاي RE باشد، آنگاه نظریه $T_\omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(T_i)$ نیز RE است.*

برهان. الگوریتم زیر قضیه‌هاي T_ω را شمارش مي‌کند:

1- Put $n := 1$

2- Execute n steps of each of machines $\mathcal{M}_{v(1)}, \cdots, \mathcal{M}_{v(n)}$ and put the resulted sentences in a list.

3- Deduce all the logical consequences of the list constructed in line 2 which can be obtained by a proof of length $\leq n$ and print them.

4- Put n:=n+1 and goto 2.

□

در اینجا (به دلایلی فني) از تابع پیچیدگی کولموگوروفی استفاده می‌کنیم که تعریف آن کمی با تعریفی که قبلاً ارایه شد متفاوت است و برابر کوچکترین اندیس i در یک شمارش استاندارد $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \cdots$ از ماشین های تورینگ است که $\mathcal{M}_i(\boldsymbol{\lambda})$ متوقف شده و دنباله مورد نظر را به دست می‌دهد. این تابع را با $\mathcal{K}_2$ نشان می دهیم، به عبارت دیگر:

تعریف ۳.۲.۲. براي هر دنباله دودويي ω، قرار می دهیم:

$$\mathcal{K}_2(\omega) = \min\{i \in \mathbb{N} \ : \ \mathcal{M}_i(\boldsymbol{\lambda}) \downarrow = \omega\}$$

.

لم ۴.۲.۲. *تابع محاسبه پذیری مانند f وجود ندارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم* $\mathcal{K}_2(f(n)) > n$.

برهان. فرض کنیم چنین تابعی وجود داشته باشد. ماشین تورینگي موجود است به طوري که $f(n)$ را محاسبه و در خروجي چاپ کند. اندیس این ماشین تابعي محاسبه‌پذیر از پارامتر n است. پس مي‌توانیم این ماشین را با $\mathcal{M}_{g(n)}$ نشان دهیم که در آن g تابعي محاسبه‌پذیر و تام است (یعني دامنه آن برابر تمام $\mathbb{N}$ است). با توجه به قضیه نقطه ثابت کلیني یك اندیس $\boldsymbol{n}$ وجود دارد به طوري که دو ماشین $\mathcal{M}_{g(\boldsymbol{n})}$ و $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}$ معادل هستند. چون $\mathcal{M}_{g(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{\lambda}){\downarrow}{=}f(\boldsymbol{n})$ پس $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\lambda}){\downarrow}{=}f(\boldsymbol{n})$ و در نتیجه $\mathcal{K}_2(f(\boldsymbol{n})) \leq \boldsymbol{n}$ (با توجه به تعریف تابع $\mathcal{K}_2$). و این با فرضي که در مورد تابع f داریم در تناقض است. □

قرار مي‌دهیم:

$$T_0 = \mathtt{PA}$$

$$T_{s+1} = T_s + \neg\mathtt{Df}_{T_s}(\overline{n_{T_s}}, \overline{10} \times \overline{k_{T_s}}) \qquad (s \in \mathbb{N})$$

که در آن n_{T_s} و k_{T_s} مانند n_T و k_T (تعریف شده در برهان بولوس) براي نظريه T_s هستند. فرض کنيد $\mathtt{Ax}_{T_0}(x)$ يك فرمول Δ_0 باشد که مجموعه اصول PA را تعريف مي‌کند و براي هر $s \in \mathbb{N}$ قرار مي‌دهيم:

$$\mathtt{Ax}_{T_{s+1}}(x) \equiv \mathtt{Ax}_{T_s}(x) \vee x = \ulcorner\neg\mathtt{Df}_{T_s}(\overline{n_{T_s}}, \overline{10} \times \overline{k_{T_s}})\urcorner$$

(توجه داريم که همه فرمول‌هاي $\mathtt{Ax}_{T_s}(x)$، Δ_0 هستند). براي هر ماشين تورينگ $\mathcal{M}_i$، گزاره $\mathcal{M}_i(\boldsymbol{\lambda}) \downarrow = x$ را مي‌توان به صورت $\exists s(\boldsymbol{\tau}(\bar{i}, 0, s) \wedge \boldsymbol{\nu}(s) = x)$ نوشت (در اينجا $\boldsymbol{\nu}$ يك تابع بازگشتي اوليه است که به کد محاسبه (s) مقدار خروجي را نسبت مي‌دهد). با در نظر گرفتن اينکه منحصر به فرد بودن s در PA قابل اثبات است، اين فرمول را به صورت معادل زير نوشته و با $\psi_i(x)$ نشان مي‌دهيم:

$$\psi_i(x) \equiv \exists s(\boldsymbol{\tau}(\bar{i}, 0, s) \wedge \forall z < s \neg\boldsymbol{\tau}(\bar{i}, 0, z) \wedge \boldsymbol{\nu}(s) = x) \tag{۳.۲}$$

تعریف ۵.۲.۲. براي هر $n \in \mathbb{N}$، $g(n)$ را برابر بزرگترين عدد مانند l مي‌گيريم به طوري که براي هر $s < l$ داشته باشيم $\mathtt{length}(\ulcorner\psi_s(x)\urcorner) \leq n$ ($\mathtt{length}(x)$ يك تابع Δ_0 است که طول فرمول با عدد گودل x را محاسبه مي‌کند).

به وضوح تابع g محاسبه‌پذير و صعودي است و $\lim_{n \to +\infty} g(n) = +\infty$.

لم ۶.۲.۲. *براي هر $j \in \mathbb{N}$، اگر $\mathcal{M}_j(0) \downarrow = n$ آنگاه فرمول $\psi_j(x)$ عدد n را در هر نظريه $T \supseteq PA$ تعريف مي‌کند.*

برهان. Σ_1ـ تماميت T نتيجه مي‌دهد که $T \vdash \psi_j(\overline{n})$. فرض کنيد s_0 عدد منحصر به فردي باشد که در فرمول $A(s) \equiv \boldsymbol{\tau}(\bar{j}, 0, s) \wedge \forall z < s \neg\boldsymbol{\tau}(\bar{j}, 0, z)$ صدق مي‌کند. با توجه به Σ_1ـ کامل بودن T، داريم $T \vdash \boldsymbol{\tau}(\bar{j}, 0, \overline{s_0}) \wedge \forall z < \overline{s_0} \neg\boldsymbol{\tau}(\bar{j}, 0, z)$ و از $\mathtt{PA} \vdash \forall z(z < \overline{s_0} \vee z \geq \overline{s_0})$ نتيجه مي‌شود که: $T \vdash \exists! s[\boldsymbol{\tau}(\bar{j}, 0, s) \wedge \forall z < s \neg\boldsymbol{\tau}(\bar{j}, 0, z)]$ و بنابراين:

$$T \vdash \forall x, y[(\psi_j(x) \wedge \psi_j(y)) \rightarrow x = y]. \qquad \square$$

لم ۷.۲.۲. *اگر $PA \subseteq T$ و $\mathbb{N} \vDash \neg Df_T(\overline{n}, \overline{10} \times \overline{k})$ آنگاه $\mathcal{K}_2(n) \geq g(10k)$.*

برهان. اگر $\mathcal{K}_2(n) < g(10k)$ آنگاه يك $j < g(10k)$ وجود دارد به طوري كه $\mathcal{M}_j(0) \downarrow= n$. با توجه به لم ۶.۲.۲، فرمول $\psi_j(x)$ عدد n را در T تعريف مي‌كند. اما $\texttt{length}(\ulcorner \psi_j(x) \urcorner) \leq 10k$ (با توجه به تعريف تابع g). بنابراين n در نظريه T توسط فرمولي با طول كوچكتر يا مساوي $10k$ تعريف مي‌شود. در نتيجه $\mathbb{N} \vDash \texttt{Df}_T(\overline{n}, \overline{10} \times \overline{k})$ كه يك تناقض مي‌باشد. □

قضيه ۸.۲.۲. *تابع f (تعريف شده در سوال ۱) محاسبه پذير نيست.*

برهان. فرض كنيم تابع f محاسبه پذير باشد. پس مي‌توانيم دنباله $\{T_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ را به طور بازگشتي بسازيم. توجه داريم كه همه جملات $\neg\texttt{Df}_{T_s}(\overline{n_s}, \overline{10} \times \overline{k_{T_s}})$ در واقع درست هستند (چون اگر نادرست بود، آنگاه نقيض آن، كه يك گزاره Σ_1 و درست مي‌بود و در PA و T_s قابل اثبات مي‌شد). از لم ۲ نتيجه مي‌شود كه $\mathcal{K}_2(n_s) > g(10k_{T_s})$. اگر تعريف فرمول‌هاي $\texttt{B}_{T_s}(x, y)$ و $\texttt{B}_{T_{s+1}}(x, y)$ را بنويسيم (براي هر $s \in \mathbb{N}$)، ملاحظه مي‌كنيم كه طول دومي از اولي بيشتر است (چونكه مجموعه اصول T_{s+1} با فرمول $\texttt{Ax}_{T_{s+1}}(x) \equiv \texttt{Ax}_{T_s}(x) \vee x = \ulcorner\neg\texttt{Df}_{T_s}(\overline{n_s}, \overline{10} \times \overline{k_{T_s}})\urcorner$ تعريف مي‌شود كه طول آن بيشتر از $\texttt{Ax}_{T_s}(x)$ است). بنابراين: $\lim\limits_{s\to+\infty} k_{T_s} = +\infty$، پس $10k_{T_s}$ و در نتيجه $g(10k_{T_s})$ مي‌توانند به اندازه دلخواه بزرگ شوند. پس براي هر $i \in \mathbb{N}$ يك s وجود دارد كه $g(10k_{T_s}) > i$ در نتيجه $\mathcal{K}_2(n_s) > i$. می توان n_s را به صورت الگوریتمی از روی i محاسبه کرد. پس یک تابع محاسبه پذير $f(i) = n_s$ وجود دارد كه براى هر i داريم $\mathcal{K}_2(f(i)) > i$. اما اين با لم ۴.۲.۲ در تناقض است. □

بولوس خود تاكيد مي‌كند كه اثبات او «نوع متفاوتي از استدلال» براي اثبات ناتماميت است ([۲]). نتيجه ما نشان مي‌دهد كه برخلاف اثبات گودل و گونه‌هاي آن، اثبات بولوس ساختاري نيست. در بخش بعدي ثابت مي‌كنيم كه اثبات شايتين هم، مانند اثبات بولوس، ساختاري نيست. قضيه زير در [۱۹] اثبات شده است:

گزاره ۹.۲.۲. *فرض كنيد T يك نظريه شامل PA باشد و تابع J به هر عدد طبيعي n عدد گودل فرمولي را نسبت دهد كه n را در نظريه T تعريف كند و داراي كوتاهترين طول ممكن باشد. در اين صورت تابع J محاسبه‌پذير نيست.*

برهان. فرض کنیم تابع J محاسبه‌پذیر باشد. بنابر تعریف این تابع، عدد n با فرمول‌هاي با طول کمتر از $\mathtt{length}(J(n))$ تعریف نمي‌شود. پس $\mathbb{N} \vDash \neg \mathtt{Df}_T(\overline{n}, \overline{\mathtt{length}(J(n)) - 1})$. از لم ۷.۲.۲ نتیجه مي‌شود که $(\dagger)$ $\mathcal{K}_2(n) \geq g(\mathtt{length}(J(n)) - 1)$. چون در زبان حساب فقط تعداد متناهي فرمول غیر هم‌ارز با طول کوچکتر یا مساوي n وجود دارد، پس فقط تعداد متناهي عدد توسط این فرمولها تعریف مي‌شوند. پس با بزرگ شدن n، $J(n)$ و در نتیجه $g(\mathtt{length}(J(n)) - 1)$ مي‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. بنابراین از $(\dagger)$ نتیجه مي‌شود که براي هر i دلخواه، مي‌توانیم به صورت محاسبه‌پذیر یك عدد $t(i)$ بیابیم به طوري که $\mathcal{K}_2(t(i)) \geq i$ و این با لم ۴.۲.۲ در تناقض است. $\square$

۳.۲ عدم امکان ساختاری شدن برهان شایتین

قضیه ۱.۳.۲. *تابع محاسبه پذیري مانند R وجود ندارد به طوري که براي هر نظریه ۱ــ سازگار $T = PA + \{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$، $R(\ulcorner \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \urcorner)$ عددي باشد که گزاره $\mathcal{K}(R(\ulcorner \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \urcorner)) > d_T$ از T مستقل باشد.*

برهان. فرض کنیم چنان تابع R محاسبه پذیري وجود داشته باشد. به منظور سادگي، براي هر نظریه

$$T = \mathtt{PA} + \{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$$

مقدار $\ulcorner \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \urcorner$ را با $\#(T)$ نشان مي‌دهیم (اگر $n = 0$ باشد، $\#(T)$ برابر عدد گودل دنباله تهي خواهد بود). قرار مي‌دهیم $T_0 = \mathtt{PA}$ و $T_{i+1} = T_i + \mathcal{K}(R(\#(T)) > d_{T_i}$. نظریه T_ω را نیز برابر اجتماع همه T_i ها قرار مي‌دهیم. هر نظریه T_{i+1} شامل یك گزاره است که در T_i قابل اثبات نیست ($\mathcal{K}(R(\#(T_i)) > d_{T_i}$). پس ماشین تورینگي که مجموعه قضیه هاي T_{i+1} را شمارش مي‌کند از ماشین تورینگي که مجموعه قضیه‌هاي T_i را شمارش مي‌کند متمایز است. درنتیجه ماشین تورینگ‌هایي که مجموعه قضیه‌هاي نظریه هاي T_i $(i \in \mathbb{N})$ را شمارش مي‌کنند، دو به دو متمایز هستند. ماشین تورینگي که قضیه‌هاي T_i را شمارش مي‌کند را با $\mathcal{M}_{t_i}$ نشان مي‌دهیم. چون فقط تعدادي متناهي ماشین تورینگ از طول کوچکتر یا مساوي یك مقدار ثابت وجود دارد،

پس با بزرگ شدن اندیس i، طول ماشین تورینگي که مجموعه قضیه‌هاي T_i را شمارش مي‌کند ($\mathcal{M}_{t_i}$)، مي‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. پس d_{T_i}، که کوچکترین جواب صحیح نامعادله $d < |\mathcal{M}_{t_i}| + \lceil log_2(d) \rceil + c$ است هم مي‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. همه گزاره‌هاي $\mathcal{K}(R(\#(T_i)) > d_{T_i}$ در مدل استاندارد حساب درست هستند، چون اگر یکي از آنها نادرست باشد، آنگاه نقیض آن یك گزاره Σ_1 درست خواهد بود، پس $T \vdash \neg\mathcal{K}(R(\#(T_i))) > d_{T_i}$ (چون T شامل PA است) که با مستقل بودن $\mathcal{K}(R(\#(T_i)) > d_{T_i}$ از T_i در تناقض است. بنابراین نظریه T_ω یك نظریه درست (در مدل استاندارد حساب) و در نتیجه ۱ــ سازگار است. نظریه T_ω به وضوح RE نیز مي‌باشد. پس از قضیه ناتمامیت شایتین نتیجه مي‌شود که یك ثابت c_ω وجود دارد که T_ω نمي‌تواند هیچ گزاره به صورت $\mathcal{K}(x) > c_\omega$ را اثبات کند. ولي، همان طور که قبلاً گفتیم، d_{T_i} مي‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. پس یك اندیس $\boldsymbol{i}$ وجود دارد که $d_{T_{\boldsymbol{i}}} > c_\omega$ و با توجه به تعریف T_ω، $T_\omega \vdash \mathcal{K}(R(\#(T_{\boldsymbol{i}}))) > d_{T_{\boldsymbol{i}}}$ که با نتیجه قبلي در تناقض است. $\square$

فصل ۳

بررسی امکان راسری سازی اثبات‌های بولوس و شایتین برای قضیه اول ناتمامیت

۱.۳ مقدمه

اثبات اولیه گودل براي قضیه اول ناتمامیت نیاز به فرض ωـ سازگاري نظریه داشت. براي معاصرین گودل تعریف ωـ سازگاری کمي غیر طبیعي به نظر مي‌رسید و انتظار بر این بود که قضیه ناتمامیت فقط بر اساس فرض سازگاري معمولی نظریه ثابت شود. این کار اولین بار توسط ب. راسر[۱] انجام شد ([۱۸]) . البته بعداً نشان داده شد که در اثبات اولیه خود گودل هم مي توان شرط ωـ سازگاري را به سازگاري مرتبه دو نظریه، یعني $\mathtt{Con}(T + \mathtt{Con}(T))$، تقلیل داد و این شرط بهینه براي اثبات مستقل بودن گزاره گودلي است ([۸]).

در این فصل این سوال را بررسي مي‌کنیم که آیا مي توان کار مشابهي براي اثبات هاي بولوس و شایتین انجام داد؟ یعني مي توان این اثبات ها را فقط با فرض سازگاري ساده نظریه بنا کرد؟ (به این کار «راسري سازي» مي‌گوییم). براي پاسخ به این سوال دو قضیه اثبات خواهیم کرد. در قضیه اول یك ناتمامیت بر اساس تابع پیچیدگي کولموگورف ثابت مي‌کنیم که از بسیاری جهات شبیه قضیه

[۱] B. Rosser

شایتین است و فقط به فرض سازگاري نظریه احتیاج دارد. پس، به یك معني، امکان راسري سازي اثبات شایتین وجود دارد. در مورد اثبات بولوس، قضیه‌ای شبیه قضیه بولوس اثبات مي کنیم که نیاز به فرض سازگاري مرتبه دوم نظریه (یعني ($\mathtt{Con}(T+\mathtt{Con}(T))$) دارد و نشان خواهیم داد که این شرط از یک دیدگاه بهینه است، یعني بر اساس فرض سازگاري ساده نظریه ($\mathtt{Con}(T)$) نمي‌توان مستقل بودن گزاره اي که در اثبات بولوس معرفي مي‌شود را اثبات کرد.

در این فصل فرض مي‌کنیم که در شمارش $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n, \cdots$ از ماشین هاي تورینگ، ابتدا همه ماشین‌هایی که یک دستورالعمل دارند ظاهر مي‌شوند، سپس همه ماشین هایی که دو دستور العمل دارند و الي آخر. مجموعه دنباله‌ها از صفر و یك را به این صورت مرتب مي‌کنیم: ابتدا دنباله با طول صفر ($\boldsymbol{\lambda}$) سپس دنباله‌هاي به طول یك (به ترتیب الفبایي)، سپس دنباله‌هاي به طول دو (به ترتیب الفبایي) و الي آخر: $\boldsymbol{\lambda}, 0, 1, 00, 10, 10, 11, 000, 001, ...$. به این شیوه مرتب کردن دنباله هاي دودویي، ترتیب «طول‌ــ الفبایي» مي‌گوییم. در این تناظر عدد ۰ متناظر دنباله $\boldsymbol{\lambda}$ است، عدد ۱ متناظر دنباله 0، عدد ۲ متناظر دنباله 1، عدد ۳ متناظر دنباله 00 و الي آخر هستند.

$\boldsymbol{\lambda}$	0	1	00	01	$\cdots$
۰	۱	۲	۳	۴	$\cdots$

لم ۳.۱.۱. *براي هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:*

$$\mathsf{Q} \vdash \forall z_0, \ldots, z_k \Big(\bigwedge_{0 \le s \le k} z_s < \overline{k} \to \bigvee_{\substack{0 \le s, s' \le k \\ s \neq s'}} z_s = z_{s'} \Big)$$

برهان. استقرا (در فرا زبان) روي k : براي $k=1$ باید اثبات کنیم

$$\mathsf{Q} \vdash \forall z_0, z_1 \big[(z_0 < \overline{1} \wedge z_1 < \overline{1}) \to z_0 = z_1 \big].$$

مي‌دانیم $\mathsf{Q} \vdash \forall z(z < \overline{1} \to z = 0)$ (براي اثبات قضیه ۱۰۶ مرجع [۵] را ببینید). پس $z_0 < \overline{1} \wedge z_1 < \overline{1}$ نتیجه مي‌دهد $z_0 = 0 \wedge z_1 = 0$، بنابراین $z_0 = z_1$. حال فرض کنید درستي لم براي k اثبات شده است؛ درستي آن را براي $k+1$ اثبات مي‌کنیم، یعني نشان مي‌دهیم که

$\bigvee_{0\leq s,s'\leq k+1} z_s = z_{s'}$. در Q استدلال مي‌کنیم: فرض کنید $\overline{k+1} > z_s$ $\bigwedge_{0\leq s\leq k+1}$. حالت اول: اگر همه $z_0, \ldots, z_{k+1}$ از $\overline{k}$ کوچکتر باشند:

$$\bigwedge_{0\leq s\leq k} z_s < \overline{k} \implies \bigvee_{\substack{0\leq s,s'\leq k\\ s\neq s'}} z_s = z_{s'} \implies \bigvee_{\substack{0\leq s,s'\leq k+1\\ s\neq s'}} z_s = z_{s'}$$

(در نتیجه گیری دوم از فرض استقرا استفاده شده است)

حالت دوم: اگر حداقل یکي از $z_0, \ldots, z_{k+1}$، مثلاً z_0، برابر $\overline{k}$ باشد: پس اگر یکي دیگر از $z_1, \ldots, z_{k+1}$ برابر $\overline{k}$ باشد، آنگاه $\bigvee_{0\leq s,s'\leq k+1}(z_s = z_{s'})$ به طور بدیهي نتیجه مي‌شود، و اگر همگي از $\overline{k}$ کوچکتر باشند، دوباره:

$$\bigwedge_{1\leq s\leq k+1} z_s < \overline{k} \implies \bigvee_{\substack{1\leq s,s'\leq k+1\\ s\neq s'}} z_s = z_{s'} \implies \bigvee_{\substack{0\leq s,s'\leq k+1\\ s\neq s'}} z_s = z_{s'}$$

(در نتیجه گیری دوم از فرض استقرا استفاده شده است) و این اثبات را کامل مي کند. □

نتیجه ۲.۱.۳. *براي هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:*

$$Q \vdash \neg\exists i_0, \cdots, i_{m+1}\big[\big(\bigwedge_{0\leq s\leq m+1} i_s \leq \overline{m}\big) \wedge \bigwedge_{\substack{0\leq s,t\leq m+1\\ s\neq t}} (i_s \neq i_t)\big].$$

۲.۳ راسری سازی برهان شایتین

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید Γ یك مجموعه از جملات در زبان نظریه T باشد. گوییم نظریه T، «Γـ تصمیم گیرنده» است اگر براي هر $\alpha \in \Gamma$ داشته باشیم $T \vdash \alpha$ یا $T \vdash \neg\alpha$.

براي هر $n \in \mathbb{N}$ قرار مي‌دهیم $A_{(n,i)} = \{\mathcal{K}_2(\omega) > n \ : \ \omega \in \mathbb{N},\ \omega \geq i\}$.

لم ۲.۲.۳. *فرض کنید T يك نظريه سازگار و RE در زبان حساب باشد و $PA \subseteq T$. براي هر دو عدد طبيعي دلخواه (و ثابت) n و i، اگر T، $A_{(n,i)}$ــ تصميم گيرنده باشد، آنگاه يك $i \geq \omega$ وجود دارد كه $T \vdash \mathcal{K}_2(\omega) > n$.*

برهان. فرض كنيد چنين ωي وجود نداشته باشد. از آنجا كه T، $A_{(n,i)}$ــ تصميم گيرنده است، پس براي هر $i \geq \omega$ داريم $T \vdash \mathcal{K}_2(\omega) \leq \overline{n}$، يعني: $T \vdash \exists j(j \leq \overline{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \omega)$. به طور خاص:

$$T \vdash \exists j(j \leq \overline{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \overline{i}).$$

$$T \vdash \exists j(j \leq \overline{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \overline{i+1}).$$

$$\vdots$$

$$T \vdash \exists j(j \leq \overline{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \overline{i+k-1}).$$

از تركيب جمله هاي بالا به دست مي‌آيد:

$$T \vdash \exists j_1, \cdots, j_k \big[\bigwedge_{1 \leq s \leq k} (j_s \leq \overline{n}) \wedge \mathcal{M}_{j_s}(\lambda) \downarrow = i + (s-1)) \big]$$

بنابراين $T \vdash \bigwedge_{\substack{1 \leq s,t \leq k \\ s \neq t}} (j_s \neq j_t)$ و در نتيجه:

$$T \vdash \exists j_1, \cdots, j_k ((\bigwedge_{1 \leq s \leq k} j_s \leq \overline{n}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq s,t \leq k \\ s \neq t}} (j_s \neq j_t)). \qquad (۱.۳)$$

حال اگر در گزاره فوق قرار دهيم $k = n + 2$، به يك تناقض با نتيجه ۲.۱.۳ مي‌رسيم و اين اثبات را كامل مي‌كند. $\square$

قضيه ۳.۲.۳. *(صورت راسري شده قضيه شايتين) اگر $PA \subseteq T$ يك نظريه سازگار در زبان حساب باشد، يك ثابت c_T وجود دارد كه براي هر $e \geq c_T$، تعداد نامتناهي $\omega \in \{0,1\}^*$ موجوداند به طوري كه گزاره $\mathcal{K}_2(\omega) > e$ از T مستقل مي‌باشند.*

برهان. بنا بر قضيه شايتين، يك ثابت c_T وجود دارد كه براي هر $e \geq c_T$، و هر w، گزاره $\mathcal{K}_2(w) > e$ در نظريه T قابل اثبات نيست. يك $e \geq c_T$ در نظر بگيريد. اگر فقط تعدادي متناهي از اين گزاره‌هاي به صورت $\mathcal{K}_2(w) > e$ از نظريه T مستقل باشد، آنگاه يك $\boldsymbol{w}$ وجود دارد كه براي هر $w \geq \boldsymbol{w}$ حداقل يكي از دو $\mathcal{K}_2(w) > e$ و $\neg(\mathcal{K}_2(w) > e)$ در T قابل اثبات است. پس، بنا بر تعريف، نظريه T، $A_{(e,\boldsymbol{w})}$ــ تصميم گيرنده مي‌شود. حال از لم ۲.۲.۳ نتيجه مي‌شود كه يك w وجود دارد به طوري كه $T \vdash \mathcal{K}_2(w) > \overline{e}$ و اين با قضيه ناتماميت شايتين (قضيه۱.۱.۲)، كه مي‌گويد هيچ يك از از اين گزاره‌ها در نظريه T قابل اثبات نيست، در تناقض است. $\square$

۳.۳ بررسی امکان راسری سازی برهان بولوس

حال ايده مشابهي را براي اثبات بولوس به كار مي‌بريم. همان طور كه در زير اثبات خواهد شد، در مورد اثبات بولوس حداقل شرط مورد نياز سازگاري ساده نظريه نيست، بلكه سازگاري مرتبه دو آن، يعني $\texttt{Con}(T + \texttt{Con}(T))$ الزامي است.

لم ۱.۳.۳. *اگر T يك نظريه در زبان حساب باشد به طوري كه $T + \mathtt{Con}(T)$ سازگار باشد، آنگاه يك n_1 وجود دارد به طوري كه $T \nvdash \mathtt{Df}_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T})$.*

برهان. فرض كنيد g_0 بيشترين عدد گودل فرمول‌هاي با طول كوچكتر يا مساوي 10_{k_T} باشد. اگر چنين n_1ي وجود نداشته باشد، براي هر $n_1 \in \mathbb{N}$ خواهيم داشت $T \vdash \mathtt{Df}_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ و در نتيجه

$$T \vdash \exists z < g_0(\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z, \overline{n_1})))$$

(يادآوري مي‌كنيم كه $\mathtt{D}(z, \overline{n_1})$ به اين معني بود كه فرمول با عدد گودل z عدد n_1 را تعريف مي‌كند). بنابراين براي هر $l \in \mathbb{N}$:

$$T \vdash \exists z < g_0(\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z, 0)))$$

$$T \vdash \exists z < g_0(\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z, \overline{1})))$$

$\vdots$

$T \vdash \exists z < g_0(\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z,\bar{l})))$

پس:

$$T \vdash \exists z_0, \dots, z_l < g_0(\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z_0,0)) \wedge \dots \wedge \mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z_l,\bar{l}))). \tag{۲.۳}$$

اگر l را برابر g_0 قرار دهیم لم ۱.۱.۳ نتیجه مي‌دهد: $\bigvee_{\substack{0\le s,s'\le l\\ s\neq s'}}(z_s = z_{s'})$ و اگر این را با (۲.۳) ترکیب کنیم، داریم:

$$T \vdash \bigvee_{\substack{0\le s,s'\le l\\ s\neq s'}} (\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z_s,\overline{s})) \wedge \mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z_{s'},\overline{s'})) \wedge z_s = z_{s'})$$

و چون $\mathsf{Q} \vdash \forall x(x \le \bar{l} \to (x = 0 \vee \cdots x = \bar{l}))$ (قضیه ۱.۶ مرجع [۵])، داریم:

$$T \vdash \bigvee_{\substack{0\le s,s'\le l\\ s\neq s', 0\le z\le l}} \left[\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z,\overline{s})) \wedge \mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(z,\overline{s'}))\right] \tag{۳.۳}$$

حال (استدلال درون T): براي هر $0 \le z \le l$ و $0 \le s, s' \le l$ ($s \neq s'$) اگر $\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(\overline{z},\overline{s})) \wedge \mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(\overline{z},\overline{s'}))$ آنگاه:

$$\begin{aligned}&\mathtt{Pr}_T(\mathtt{D}(\overline{z},\overline{s}) \wedge \mathtt{D}(\overline{z},\overline{s'}))\\ \Rightarrow\ &Pr_T(\ulcorner \varphi(\overline{s}) \wedge \varphi(\overline{s'}) \wedge \forall u,w\left[\varphi(u)\wedge\varphi(w) \to u = w\right]\urcorner)\end{aligned}$$

(φ فرمولی است که عدد گودل آن z مي‌باشد)

$$\Rightarrow Pr_T(\ulcorner \overline{s} = \overline{s'} \urcorner)$$

$$\Rightarrow \neg\mathtt{Con}(T)$$

(چون $s \neq s'$). حال (۳.۳) نتیجه مي دهد که $T \vdash \bigvee_{\substack{0\leq s,s'\leq l \\ s\neq s', 0\leq z\leq l}} (\neg\mathtt{Con}(T))$ پس $T \vdash \neg\mathtt{Con}(T)$ و این با فرض سازگاري $T + \mathtt{Con}(T)$ در تناقض است. □

قضیه ۲.۳.۳. *اگر T يك نظریه در زبان حساب و شامل PA باشد و $T + Con(T)$ سازگار باشد، آنگاه يك $n_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوري که $\neg Df_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ از T مستقل است.*

برهان. طبق لم قبل، يك n_1 وجود دارد به طوري که $T \nvdash \mathtt{Df}_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T})$. n_1 را کوچکترین عدد با این خاصیت انتخاب مي‌کنیم. پس برای هر $z < n_1$ داریم:

$T \vdash \mathtt{Df}_T(\overline{z}, \overline{10} \times \overline{k_T})$

و در نتیجه:

$$T \vdash \forall z < \overline{n_1}\ \mathtt{Df}_T(z, \overline{10} \times \overline{k_T}). \tag{۴.۳}$$

اگر $T \vdash \neg\mathtt{Df}_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ آنگاه از (۴.۳) نتیجه می‌شود:

$$T \vdash \neg\mathtt{Df}_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T}) \wedge \forall z < \overline{n_1}\big[\mathtt{Df}_T(z, \overline{10} \times \overline{k_T})\big]. \tag{۵.۳}$$

يك شمارش ساده نشان مي‌دهد که طول فرمول:

$$\mathtt{S}_T(x) \equiv (\neg\mathtt{Df}_T(x, \overline{10} \times \overline{k_T}) \wedge \forall z < x(\mathtt{Df}_T(z, \overline{10} \times \overline{k_T})))$$

کمتر از $10k_T$ است و به سادگي ملاحظه مي‌شود که $\mathtt{PA} \vdash \forall x, y\big[\mathtt{S}_T(x) \wedge \mathtt{S}_T(y) \to x = y\big]$. پس، با توجه به (۵.۳)، فرمول $\mathtt{S}_T(x)$، با طولی کوچکتر از $10k_T$، عدد n_1 را تعریف مي‌کند و در نتیجه $T \vdash \mathtt{Df}_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ که با فرضی که در مورد n_1 داریم در تناقض است. $\square$

حال نشان مي‌دهیم سازگاري $T + \mathtt{Con}(T)$ شرط بهینه براي اثبات این قضیه است (و آن را به سازگاری ساده نظریه نمی‌توان تقلیل داد):

اگر $T + \mathtt{Con}(T)$ سازگار نباشد، آنگاه $T \vdash \neg\mathtt{Con}(T)$. پس $T \vdash \mathtt{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))$. واضح است که براي هر جمله θ داریم $T \vdash \mathtt{Pr}_T(\ulcorner (0 = 1) \to \theta \urcorner)$، پس $T \vdash \mathtt{Pr}_T(\ulcorner \theta \urcorner)$. فرض کنید i_0 عدد گودل يك فرمول دلخواه از طول $10k_T$ باشد و سپس θ را فرمولي بگیرید که عدد گودل آن $D(i_0, n)$ مي‌باشد (n يك عدد طبیعي دلخواه). داریم $T \vdash \mathtt{Pr}_T(D(\overline{i_0}, \overline{n}))$، پس:

$$T \vdash \exists z[\mathtt{length}(z) \leq \overline{10} \times \overline{k_T} \wedge \mathtt{Pr}_T(D(z, \overline{n}))]$$

(چون i_0 عدد گودل فرمولي است که طول آن $10k_T$ است). بنابراین $T \vdash \mathtt{Df}_T(\overline{n}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ و در نتیجه $T \vdash \neg\mathtt{S}_T(\overline{n})$ (با توجه به تعریف $\mathtt{S}_T(x)$). پس براي هر $n \in \mathbb{N}$، هیچ یک از دو گزاره $\mathtt{S}_T(\overline{n})$ و $\mathtt{Df}_T(\overline{n}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ نمي‌توانند از نظریه T مستقل باشند.

فصل ۴

تعمیم قضیه گودل ـ راسر براي نظریه‌هاي تعریف‌پذیر

۱.۴ مقدمات

نظریه T را «Σ_n ـ تعریف پذیر»[۱] گوییم اگر مجموعه اصول آن توسط یك فرمول Σ_n قابل تعریف باشد؛ یعني یك فرمول $\mathtt{Ax}_T(x) \in \Sigma_n$ وجود داشته باشد به طوري که هر $i \in \mathbb{N}$ عدد گودل یك اصل از T است اگر و فقط اگر $\mathbb{N} \vDash \mathtt{Ax}_T(\bar{i})$. «$\Pi_n$ ـ تعریف پذیر» بودن به روش مشابه تعریف مي‌شود. نظریه T را «Σ_n ـ درست»[۲] گوییم، اگر همه گزاره‌هاي Σ_n که در T قابل اثبات هستند در مدل استاندارد حساب درست باشند.

قضیه اول ناتمامیت مي‌گوید که $\mathtt{PA}$ (و هر توسیع RE آن) Π_1 ـ ناتمام است، اما در مورد نظریه‌اي مانند $S = \mathtt{PA} + \Pi_1\text{-}Th(\mathbb{N})$ چه مي‌توان گفت؟ آیا این نظریه کامل است؟ به وضوح این نظریه Π_1 ـ کامل و Σ_1 ـ کامل است، اما آیا مي‌تواند، مثلاً، Π_2 ـ کامل هم باشد؟ دقت کنیم که S یك نظریه Π_1 ـ تعریف‌پذیر است.

---

[۱] Σ_n-definable

[۲] Σ_n-sound

يكي از اولين نتايج در مورد ناتماميت نظريه‌هاي تعريف پذير توسط يروسلوف[۳] به دست آمد ([۱۰]):

قضيه ۱.۱.۴. (*يروسلوف*) *اگر* $T \supseteq PA$ *يك نظريه سازگار باشد و مجموعه قضيه‌هاي آن مجموعه‌اي* Δ_2ـ *تعريف‌پذير باشد، آنگاه* T *نمي‌تواند همه گزاره‌هاي درست* Π_1 *را ثابت كند.*

اين قضيه جنبه ديگري از اين نتيجه كلاسيك، كه يك توسيع Δ_2 و كامل از PA وجود دارد، را روشن مي‌سازد ([۲۳]). دقت كنيم كه در قضيه فوق شرط $\mathtt{Pr}_T \in \Delta_2$ را نمي‌توان با صورت ضعيفتر $\mathtt{Pr}_T \in \Sigma_2$ جايگزين كرد، چون براي مثال، نظريه S (بالا) Σ_2 ـ تعريف پذير است و $\Pi_1 - Th(\mathbb{N}) \subseteq \mathtt{S}$. قضيه يروسلوف توسط هايك[۴] به صورت زير تعميم داده شد ([۶]):

قضيه ۲.۱.۴. (*هايك*) *اگر* $T \supseteq PA$ *يك نظريه سازگار باشد و مجموعه قضيه هاي آن مجموعه‌اي* Δ_nـ *تعريف‌پذير باشد، آنگاه* T *نمي‌تواند همه گزاره‌هاي درست* Π_{n-1} *را ثابت كند.*

نتيجه ديگري از هايك بيان مي‌كند كه اگر مجموعه قضيه‌هاي يك توسيع nـ سازگار از PA، Π_nـ تعريف پذير باشد، آنگاه آن نظريه نمي‌تواند Π_{n-1}ـ كامل باشد ([۶]). او همچنين نشان داد كه يك نظريه با شرايط فوق كامل هم نمي‌تواند باشد (در واقع يك گزاره Π_n مستقل از آن وجود دارد). ما اين نتيجه را، با نشان دادن اينكه در واقع يك گزاره Π_{n-1} مستقل از نظريه وجود دارد، قوي‌تر مي‌كنيم (لم ۳.۲.۴).

۲.۴ ملاحظاتي پيرامون اثبات هايك

تذكر ۱.۲.۴. (درباره اثبات قضيه ۲.۵ مرجع [۶]). در قضيه ۲.۵ مرجع [۶]، فرض شده است كه نظريه T شامل PA، nـ سازگار و بسته تحت استنتاج بوده و همچنين مجموعه قضيه‌هاي آن Π_nـ تعريف پذير باشد (براي يك $n \geq 2$). سپس ثابت مي‌شود كه (الف): $\Pi_n - Th(\mathbb{N}) \nsubseteq T$ و همچنين (ب): T كامل نيست.

[۳] R. Jeroslow

[۴] P. Hájek

در اثبات (الف)، به منظور رسیدن به تناقض، فرض شده است که $\Pi_{n-2}\text{–}Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ و در پایان اثبات (ب) ناسازگاري T از Tـ اثبات پذیري یك گزاره Π_{n-2} و نادرست نتیجه گرفته شده است (نشان داده شده با $(\tau_1(\overline{p}, \overline{m}, \overline{\varphi})$. بدیهي است که اگر $\Pi_{n-2}\text{–}Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ آنگاه هیچ گزاره نادرست و Π_{n-2} در T قابل اثبات نیست. احتمالاً منظور اثبات، استفاده از فرض $\Pi_{n-2}\text{–}Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ (که نادرست است) نبوده، بلکه منظور استفاده از تمامیت و nـ سازگاري T بوده تا ثابت کند T هیچ گزاره نادرست و Π_{n-2} را ثابت نمي‌کند. این موضوع را در لم بعد (که یك نقص کوچك و غیر اساسي در اثبات قضیه ۲.۵ مرجع [۶] را پر مي‌کند) اثبات مي‌کنیم. این لم یك تعمیم براي قضیه ۲۰ مرجع [۸] است، که بیان مي‌کند مجموعه گزاره‌هاي درست حساب در مدل استاندارد ($(Th(\mathbb{N})$ تنها توسیع ωـ سازگار و کامل از PA است.

لم ۲.۲.۴. (*تکمیل اثبات قضیه ۲.۵ از* [۶]). *هر توسیع nـ سازگار و Π_nـ تصمیم گیرنده از PA، Π_nـ کامل است.*

برهان. استقرا بر روي n. براي $n = 0$ چیزي براي اثبات وجود ندارد. فرض کنیم حکم براي n برقرار باشد و آن را براي $n + 1$ ثابت کنیم. اگر نظریه T، $(n + 1)$ـ سازگار و Π_{n+1}ـ تصمیم گیرنده بوده ولي Π_{n+1}ـ کامل نباشد، آنگاه یك گزاره $\psi \in \Pi_{n+1}\text{–}Th(\mathbb{N})$ وجود دارد که $T \nvdash \psi$. مي‌نویسیم $\psi = \forall x\theta(x)$ که در آن $\theta \in \Sigma_n$؛ پس $\mathbb{N} \vDash \theta(\overline{m})$ (براي هر $m \in \mathbb{N}$). با توجه به فرض استقرا، T، Π_nـ کامل و در نتیجه Σ_nـ کامل است؛ پس $T \vdash \theta(\overline{m})$ (براي هر $m \in \mathbb{N}$). از طرف دیگر، Π_{n+1}ـ تصمیم گیرنده بودن T و $T \nvdash$ نتیجه مي‌دهد که $T \vdash \neg\psi$، یعني $T \vdash \exists x \neg\theta(x)$ و این با فرض $(n + 1)$ـ سازگاري T در تناقض است. □

لم ۳.۲.۴. (*تعمیم قضیه* (۲)۲.۵ *مرجع* [۶]). *اگر بستار استنتاجي یك نظریه nـ سازگار و شامل PA، Π_nـ تعریف پذیر باشد، آنگاه یك گزاره Π_{n-1} مستقل از آن وجود دارد (براي هر $n \geq 2$).*

برهان. اگر براي نظریه nـ سازگار T داشته باشیم $\mathtt{PA} \subseteq T$ و $\mathtt{Pr}_T \in \Pi_n$ آنگاه از لم قبل (و $(n - 1)$ـ سازگاري T) نتیجه مي‌شود که $\Pi_{n-1}\text{–}Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ و این با قضیه (۱)۲.۵ مرجع [۶]، که بیان مي‌کند تحت شرایط فوق $\Pi_{n-1}\text{–}Th(\mathbb{N}) \nsubseteq T$ برقرار است، در تناقض مي‌باشد. □

۳.۴ برخي تلاش هاي اخير

در نتايج يروسلوف (قضيه ۲ مرجع [۱۰]) و تعميم‌هاي هايك (قضيه هاي (۱)۲.۵ و ۲.۸ مرجع [۶]) نتيجه‌اي در مورد ناتماميت نداريم، بلكه فقط ثابت مي‌شود نظريه شامل رده خاصي از گزاره هاي درست نيست. در نتايجي از هايك كه شامل ناتماميت هستند (نتايج ۱.۳ و ۲.۵ مرجع [۶]) فرض‌هاي قوي n_ سازگاري يا Π_n_ كامل بودن نظريه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. يك سوال طبيعي اين است كه آيا مي‌توان اين شرط‌ها را با سازگاري ساده جايگزين كرد؟ (راسري سازي). برخي تلاش‌ها در اين راستا انجام گرفته‌اند (مراجع [۹] و [۱۵]). يادآوري مي‌كنيم كه نتايج ناتماميت گودل و راسر فقط براي نظريه هاي تعريف پذير كاربرد دارند، چون براي مثال، نظريه تعريف ناپذير $Th(\mathbb{N})$ كامل است. اثبات‌هايي كه براي قضيه ناتماميت گودل_ راسر در مرجع‌هاي [۹] و [۱۵] ارايه شده‌اند هردو نادرست مي‌باشند. براي نادرستي نتيجه مرجع [۱۵] مي‌توانيد [۲۰] و همچنين [۲۱] و [۱۶] را ببينيد. نادرستي اثبات مرجع [۹] در تذكر زير توضيح داده شده است. متاسفانه امكان اثبات ناتماميت براي نظريه هاي تعريف پذير بر پايه سازگاري ساده نظريه، حتي براي نظريه‌هاي Π_1_ تعريف پذير، وجود ندارد؛ چون در نتيجه ۴.۶.۴ زير نشان مي‌دهيم يك توسيع Π_1_ تعريف پذير و كامل از PA وجود دارد.

تذكر ۱.۳.۴ . متاسفانه اثبات ارائه شده براي ناتماميت گودل_ راسر در مرجع [۹] نادرست است. در اثبات لم ۳ اين مقاله، نويسنده لم قطري را براي فرمول $\neg F(x)$ به كار مي‌برد كه فرمول $F(x)$ در لم S فصل ۶ مرجع [۲۴] (به علاوه لم ۲ بخش ۵ مقاله مذكور) ساخته شده است. به سادگي ملاحظه مي‌شود كه $F \in \Pi_1$ و در نتيجه $A \in \Sigma_1$. اگر همان طور كه در لم ۳ مرجع [۹] (و قضيه و نتيجه بعد از آن) ادعا شده، براي هر نظريه Π_1_ تعريف پذير و شامل PA يك گزاره Σ_1 مانند A مستقل از آن نظريه وجود داشته باشد، آنگاه بايد يك گزاره Π_1 وجود داشته باشد كه از نظريه $\mathtt{PA} + \Pi_1 - Th(\mathbb{N})$ مستقل باشد. ولي واضح است كه اين نظريه Π_1_ كامل و Σ_1_ كامل است، پس قضيه اصلي مرجع [۹] نمي‌تواند درست باشد. در واقع قدم نادرست در اثبات لم ۲ مي‌باشد، آنجا كه نويسنده مي گويد: «m_1 مي‌تواند طوري انتخاب شود كه $m_2 \leq m_1$ و در نتيجه $\overline{R}(k, m_2, Neg(n))$». ولي اگر m_1 به اندازه كافي بزرگ اختيار شود، شرط $\forall x \leq m_1 \overline{R}(k, x, Neg(n))$ ممكن است ديگر برقرار نباشد.

۴.۴ صورت معنايي قضيه ناتماميت

قضيه اول ناتماميت در صورت معنايي (و ضعيفتر) خود بيان مي‌كند كه هيچ نظريه RE و درست كه شامل PA باشد نمي‌تواند Π_1ـ كامل باشد. با توجه به اينكه مجموعه‌هاي RE دقيقاً همان مجموعه‌هاي Σ_1ـ تعريف پذير هستند، اين قضيه مي‌تواند به صورت زير بيان شود:

$$\boxed{\text{Gödel's 1st theorem:}\quad \mathtt{PA}\subseteq T\ \ \&\ \ \mathtt{Ax}_T\in\Sigma_1\ \ \&\ \ \mathbb{N}\models T\ \ \Rightarrow\ \ \Pi_1\text{–}Th(\mathbb{N})\not\subseteq T}$$

يك تعميم طبيعي اين قضيه به صورت زير مي‌باشد (فصل ۳ مرجع [۲۴] و نتيجه ۱ مرجع [۲۲] را ببينيد).

قضيه ۱.۴.۴. *اگر T يك نظريه درست، Σ_nـ تعريف پذير و شامل PA باشد، آنگاه T، Π_nـ ناتمام است.*

$$\boxed{\mathtt{PA}\subseteq T\ \ \&\ \ \mathtt{Ax}_T\in\Sigma_n\ \ \&\ \ \mathbb{N}\models T\ \ \Rightarrow\ \ \Pi_n\text{–}Th(\mathbb{N})\not\subseteq T}$$

برهان. براي يك نظريه T با شرايط فوق، به كمك لم قطري جمله γ را طوري مي‌سازيم كه:

$$\mathtt{PA}\vdash\gamma\leftrightarrow\neg\mathtt{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner).$$

به وضوح $\gamma\in\Pi_n$. نشان مي‌دهيم $\mathbb{N}\models\gamma$ (†). چون اگر $\mathbb{N}\models\neg\gamma$ آنگاه $\mathbb{N}\models\mathtt{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$ پس $T\vdash\gamma$ كه با درست بودن T در تناقض است. حال نشان مي‌دهيم $T\nvdash\gamma$. به منظور رسيدن به تناقض، فرض مي‌كنيم $T\vdash\gamma$. پس $\mathbb{N}\models\mathtt{Pr}_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$ و در نتيجه $\mathbb{N}\models\neg\gamma$ كه با گزاره (†) در تناقض است. پس ثابت كرديم كه $\gamma\in\Pi_n\text{–}Th(\mathbb{N})\backslash T$. □

نتيجه ۲.۴.۴. *هيچ توسيع درست و Π_n ـ تعريف‌پذير PA نمي‌تواند Π_{n+1} ـ كامل باشد.*

برهان. كافي است دقت كنيم كه هر نظريه Π_n ـ تعريف پذير، Σ_{n+1}ـ تعريف پذير هم است. □

تذکر ۳.۴.۴. این واقعیت که PA Σ_1_ کامل، ولي Π_1_ ناتمام است، کاملاً شناخته شده است (براي مثال مرجع [۵] را ببینید). پس Σ_1_ تمامیت، Π_1_ تمامیت را نتیجه نمي‌دهد. در حالت کلي، Σ_n_ تمامیت، Π_n_ تمامیت را نتیجه نمي‌دهد؛ چون براي مثال، نظریه $\mathtt{PA} + \Sigma_n\text{-}Th(\mathbb{N})$، Σ_n_ کامل است ولي Π_n_ کامل نیست (بنا بر قضیه قبل). از طرف دیگر، Π_n_ تمامیت، Σ_n_ تمامیت، و در واقع Σ_{n+1}_ تمامیت را نتیجه مي‌دهد، چون براي هر گزاره Σ_{n+1} و درست مانند $\exists x_1 \cdots x_k \theta(x_1, \cdots, x_k)$، که $\theta \in \Pi_n$، اعداد $n_1 \cdots n_k \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $\mathbb{N} \models \theta(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k})$. چون نظریه T، Π_n_ کامل فرض شده، داریم $T \vdash \theta(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k})$ و در نتیجه:

$$T \vdash \exists x_1 \cdots x_k \theta(x_1, \cdots, x_k).$$

به طور نمادین:

$$\boxed{\Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N}) \subseteq T \quad \Rightarrow \quad \Sigma_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) \subseteq T}$$

لم ۴.۴.۴. *براي هر $n \in \mathbb{N}$، نظریه T، Σ_n_ درست است، اگر و فقط اگر نظریه $T + \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ سازگار باشد.*

برهان. فرض کنیم که نظریه T، Σ_n_ درست باشد. اگر نظریه $T+\Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ سازگار نباشد، آنگاه $T + \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N}) \vdash \perp$. با توجه به متناهي بودن اثبات، گزاره‌هاي $\pi_1, \cdots, \pi_m \in \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ وجود دارند به طوري که $T + \pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_m \vdash \perp$ و در نتیجه $T \vdash \neg(\pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_m)$. چون $\pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_m$ گزاره‌اي Π_n و درست است، پس $\neg(\pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_m)$ گزاره‌اي Σ_n و نادرست خواهد بود، که با Σ_n_ درست بودن T در تناقض است. برعکس، فرض کنیم نظریه $T + \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ سازگار باشد. اگر T یك گزاره Σ_n و نادرست مانند σ را ثابت کند، آنگاه چون $\neg\sigma \in \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ پس $T+\Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N}) \vdash \neg\sigma$. ضمناً از $T \vdash \sigma$ نتیجه مي‌شود $T+\Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N}) \vdash \sigma$ که با سازگاري $T + \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ در تناقض است. $\square$

شرط معنايي		نماد متعارف		شرط نحوي
$[\Sigma_\infty]$ *soundness of* T	$\equiv$	$\mathbb{N} \vDash T$	$\equiv$	$\texttt{Con}(T + ([\Pi_\infty] Th(\mathbb{N})))$
Σ_n *soundness of* T	$\equiv$	$-$	$\equiv$	$\texttt{Con}(T + (\Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})))$
Σ_1 *soundness of* T	$\equiv$	$1\text{-}\texttt{Con}(T)$	$\equiv$	$\texttt{Con}(T + (\Pi_1\text{-}Th(\mathbb{N})))$
Σ_0 *soundness of* T	$\equiv$	$\texttt{Con}(T)$	$\equiv$	$\texttt{Con}(T + (\Pi_0\text{-}Th(\mathbb{N})))$

۵.۴ صورت کلي قضیه ناتمامیت گودل

صورت اولیه قضیه ناتمامیت گودل بیان مي‌کند که هیچ توسیع شمارش‌پذیر بازگشتي و ω- سازگار از PA نمي‌تواند Π_1- تصمیم‌گیرنده باشد. مفهوم نحوي ω- سازگاري به منظور اجتناب از مفهوم معنايي «درست بودن» ارائه شد. بعداً مشخص شد که براي اثبات قضیه ناتمامیت فرض ضعیفتر ۱- سازگاري، که معادل Σ_1- درستي نظریه است، کافي مي‌باشد (مرجع [۸] را ببینید).

$$\boxed{\texttt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \texttt{Ax}_T \in \Sigma_1 \ \ \& \ \ \texttt{Con}(T + \Pi_1\text{-}Th(\mathbb{N})) \ \ \Rightarrow \ \ T \notin \Pi_1\text{-Deciding}}$$

یك تعمیم طبیعي براي این صورت از قضیه ناتمامیت، Π_n- تصمیم گیرنده نبودن هر توسیع Σ_n- تعریف پذیر و سازگار با $\Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ است، که با کمك قضیه زیر اثبات خواهد شد.

قضیه ۱.۵.۴. *اگر* $\texttt{PA} \subseteq T$ *یك نظریه* Π_n- *تعریف پذیر و سازگار با* $\Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ *باشد، آنگاه* T، Π_n- *تصمیم گیرنده نیست.*

$$\boxed{\texttt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \texttt{Ax}_T \in \Pi_n \ \ \& \ \ \texttt{Con}(T + \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})) \ \ \Rightarrow \ \ T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}}$$

برهان. با توجه به فرض، $T^* = T + \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ یك نظریه سازگار است. محمول اثبات‌پذیري زیر را درنظر مي‌گیریم:

$$\mathtt{Proof}_{T^*}(z,x) \equiv \exists w,u,t \leq z[z = \langle w,u,t\rangle \wedge \Pi_n\text{-}Th(w) \wedge \mathtt{conjAx}_T(u) \wedge$$
$$\mathtt{Proof}(t, w \wedge u \rightarrow x)]$$

(در عبارت فوق $\mathtt{Proof}(x,y)$ محمول اثبات در منطق مرتبه اول است و $\langle x,y,z\rangle$ یك تابع كدگذاري استاندارد است كه تناظري یك به یك بین $\mathbb{N}^3$ و $\mathbb{N}$ برقرار مي‌كند و $\mathtt{conjAx}_T(x)$ نیز یك فرمول Δ_0 است كه بیان مي‌كند x عدد گودل عطف تعدادي متناهي از اصول T است). روشن است $\mathtt{Proof}_{T^*}(z,x)$ به این معني است كه z یك اثبات براي گزاره x در نظریه $T^* = T + \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N})$ مي‌باشد. با كمك لم قطري سازي مي‌توان یك گزاره γ ساخت به طوري كه

$$T \vdash \gamma \leftrightarrow \forall z[\mathtt{Proof}_{T^*}(z,\gamma) \rightarrow \exists z' < z \mathtt{Proof}_{T^*}(z',\neg\gamma)] \qquad (۱.۴)$$

به سادگي مي‌توان ملاحظه كرد كه γ یك گزاره Π_{n+1} است. نشان مي‌دهیم كه γ از T^* (و در نتیجه از T) مستقل است. فرض كنیم $T^* \vdash \gamma$. پس تعداد متناهي گزاره Π_n و درست مانند $\pi_0, \cdots, \pi_l$ و تعداد متناهي $a_0, \cdots, a_m$ از اصول T وجود دارند به طوري كه $(\pi_0 \wedge \cdots \wedge \pi_l) \wedge (a_0 \wedge \cdots \wedge a_m) \rightarrow \gamma$. قرار مي‌دهیم $w_0 = \ulcorner \pi_0 \wedge \cdots \wedge \pi_l \urcorner$ و $u_0 = \ulcorner a_0 \wedge \cdots \wedge a_m \urcorner$. دقت مي‌كنیم كه براي یك t_0 مناسب، $\Pi_n\text{-}Th(w_0) \wedge \mathtt{conjAx}_T(u_0) \wedge \mathtt{Proof}(t_0, w_0 \wedge u_0 \rightarrow \gamma)$ یك گزاره درست (در مدل استاندارد) است، پس اگر قرار دهیم $z_0 = \langle w_0, u_0, t_0\rangle$ داریم $\mathtt{Proof}_{T^*}(z_0,\gamma)$. حال از تعریف γ نتیجه مي‌شود كه:

$$T^* \vdash \exists z' < z_0 Proof_{T^*}(z',\neg\gamma). \qquad (۲.۴)$$

اما با توجه به سازگار بودن T^* تمام گزاره هاي $\mathtt{Proof}_{T^*}(\overline{z'},\neg\gamma)$ $(z' \in \mathbb{N})$ در مدل استاندارد نادرست هستند. پس $\forall z < z_0 \neg\mathtt{Proof}_{T^*}(z,\neg\gamma)$ یك گزاره درست است و در PA (و در نتیجه در T) قابل اثبات است كه:

$$\forall z\big[z < \overline{z_0} \leftrightarrow (z = 0 \vee \cdots \vee z = \overline{z_0 - 1})\big]$$

پس:

$$T \vdash [\forall z < z_0 \neg \texttt{Proof}_{T^*}(z, \neg\gamma)] \leftrightarrow [\neg \texttt{Proof}_{T^*}(0, \neg\gamma) \wedge \cdots \wedge \neg \texttt{Proof}_{T^*}(\overline{z_0 - 1}, \neg\gamma)]$$

و در نتیجه $\forall z < z_0 \neg \texttt{Proof}_{T^*}(z, \neg\gamma)$ معادل یک گزاره Σ_n است (به طور اثبات پذیر در T). چون T^* شامل همه گزاره‌هاي درست Π_n است، پس همه گزاره‌های درست Σ_n را هم اثبات می‌کند، در نتیجه $T^* \vdash \forall z < z_0 \neg \texttt{Proof}_{T^*}(z, \neg\gamma)$ که با (۲.۴) در تناقض است (چون T^* سازگار فرض شده). پس ثابت کردیم که $T^* \nvdash \gamma$. حال ثابت مي‌کنیم که $\neg\gamma$ هم در T^* قابل اثبات نیست. فرض کنیم $T^* \vdash \neg\gamma$ و $z_0 \in \mathbb{N}$ عدد گودل این اثبات باشد. چون $\texttt{Proof}_{T^*}(z_0, \neg\gamma)$ يك گزاره درست و Π_n است، پس $T^* \vdash \texttt{Proof}_{T^*}(z_0, \neg\gamma)$ و در نتیجه:

$$T^* \vdash \forall z > z_0 \big[\exists z' < z \texttt{Proof}_{T^*}(z', \neg\gamma)\big]$$

$$\Rightarrow \ T^* \vdash \forall z > z_0 \big[\texttt{Proof}_{T^*}(z, \gamma) \rightarrow \exists z' < z \texttt{Proof}_{T^*}(z', \neg\gamma)\big]. \tag{۳.۴}$$

چون T^* سازگار است، پس براي هر $0 \leq z' \leq z_0$ داریم $\mathbb{N} \vDash \neg \texttt{Proof}_{T^*}(\overline{z}, \gamma)$ و در نتیجه $T^* \vdash \neg \texttt{Proof}_{T^*}(\overline{z}, \gamma)$. بنابراین

$$T^* \vdash \forall z \leq z_0 \big[\texttt{Proof}_{T^*}(z, \gamma) \rightarrow \exists z' < z \texttt{Proof}_{T^*}(z', \neg\gamma)\big]. \tag{۴.۴}$$

حال از ترکیب ۳.۴ و ۴.۴ نتیجه مي‌شود که

$$T^* \vdash \forall z \leq z_0 \big[\texttt{Proof}_{T^*}(z, \gamma) \rightarrow \exists z' < z \texttt{Proof}_{T^*}(z', \neg\gamma)\big]$$

و با توجه به تعريف γ داريم $T^* \vdash \gamma$ كه با فرض $T^* \vdash \neg\gamma$ در تناقض است. پس ثابت شد كه γ از T^*، و در نتيجه از T، مستقل است. $\square$

دقت كنيم كه براي $n = 0$ قضيه فوق همان قضيه راسر مي‌باشد و اثبات نسبتاً طولاني آن نيز بر اساس روش راسر است.

نتيجه ۲.۵.۴. *هيچ توسيع Π_n_ كامل و Π_n_ تعريف پذير از PA نمي‌تواند Π_{n+1}_ تصميم گيرنده باشد.*

برهان. T، Π_n_ كامل است، يعني $\Pi_n{-}Th(\mathbb{N}) \subseteq T$. پس $T + \Pi_n{-}Th(\mathbb{N})$ سازگار است. حال از لم قبل نتيجه مي‌شود كه T، Π_{n+1}_ تصميم گيرنده نيست. $\square$

نتيجه ۳.۵.۴. *هيچ توسيع Π_n_ تعريف پذير و n_ سازگار از PA نمي‌تواند Π_{n+1}_ تصميم گيرنده باشد.*

برهان. يك نظريه T با شرايط ذكر شده در فوق را در نظر بگيريد. اگر T، Π_n_ تصميم گيرنده نباشد آنگاه چيزي براي اثبات وجود ندارد، پس فرض كنيم كه T، Π_n_ تصميم گيرنده است. حال از لم ۲.۲.۴ نتيجه مي‌شود كه $\Pi_n{-}Th(\mathbb{N}) \subseteq T$، پس $T + \Pi_n{-}Th(\mathbb{N})$ سازگار است و از قضيه ۱.۵.۴ نتيجه مي‌شود كه T، Π_{n+1}_ تصميم گيرنده نيست. $\square$

لم زير تعميمي از يك نتيجه شناخته شده، منسوب به كريگ [۵] را ارائه مي‌كند.

لم ۴.۵.۴. *براى هر $n \geq 1$، هر نظريه Σ_{n+1}_ تعريف پذير معادل يک نظريه Π_n_ تعريف‌پذير مى‌باشد.*

برهان. اگر $\mathtt{Ax}_T(x) \equiv \exists x_1, \cdots, x_n \theta(x, x_1, \cdots, x_n)$، كه در آن $\theta \in \Pi_n$، آنگاه:

$\mathtt{Ax}_T(x) \equiv \exists y \theta'(x, y)$

[5] W. Craig

جایي که $\theta'(x,y) \equiv \exists x_1, \cdots, x_n \leq y \theta(x, x_1, \cdots, x_n) \in \Pi_n$. حال دقت می‌کنیم که نظریه:

$$T' = \{\psi \wedge (\overline{k} = \overline{k}) \ : \ \mathbb{N} \vDash \theta'(\ulcorner \psi \urcorner, \overline{k})\}$$

معادل نظریه T است و Π_n- تعریف پذیر توسط فرمول:

$$\mathtt{Ax}_{T'}(x) \equiv \exists y, z \leq x[x = (y \wedge \ulcorner \overline{z} = \overline{z} \urcorner) \wedge \theta'(y,z)]$$

می‌باشد. □

قضیه ۵.۵.۴. *برای هر $n \geq 1$، اگر T نظریه‌ای Σ_n- درست و Σ_{n+1}- تعریف پذیر باشد، آنگاه یک گزاره (درست) Π_{n+1} وجود دارد که مستقل از T است.*

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \ \& \ \ T \ is \ \Sigma_n\text{-sound} \ \ \Rightarrow \ \ T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}}$$

برهان. با توجه به لم قبل، T معادل یک نظریه Π_n- تعریف پذیر است. حال از قضیه ۱.۵.۴ نتیجه می‌شود که یک گزاره (درست) Π_{n+1} وجود دارد که مستقل از T است. □

مي‌توان ثابت کرد که براي $n = 0, 1, 2$، دو مفهوم n- سازگاري و Σ_n- درستي معادل هستند ([۸])، اما براي $n > 2$ شرط n- سازگاري اکیداً از Σ_n- درستي ضعیفتر است. این امر از لم زیر نتیجه مي‌شود (اثبات شده توسط جورج کرایزل[۶] در سال ۱۹۵۵،[۸]).

لم ۶.۵.۴. *يك نظريه ω- سازگار وجود دارد که گزاره‌اي Σ_3 و نادرست را اثبات مي‌کند.*

برهان. يك عدد طبیعي $n \geq 2$ را در نظر بگیریم. ω- سازگاري يك نظريه T را مي‌توان با گزاره زير بیان کرد:

$$\omega\text{-}\mathtt{Con}(T) \equiv \neg \exists \alpha \big[\mathtt{Pr}_T(\ulcorner \exists x \alpha(x) \urcorner) \wedge \forall z \mathtt{Pr}_T(\ulcorner \neg \alpha(\overline{z}))\big].$$

[۶] G. Kreisel

با كمك لم قطري سازي، يك گزاره J مي‌سازيم به طوري كه:

$$\mathtt{PA} \vdash J \leftrightarrow \neg\omega\text{\_}\mathtt{Con}(\mathtt{PA}+J)\ (\dagger).$$

به سادگي ملاحظه مي‌شود كه J گزاره‌اي Σ_3 است. اولا نشان مي‌دهيم كه $\mathbb{N} \vDash \neg J$. اگر $\mathbb{N} \vDash J$ آنگاه $\mathtt{PA}+J$ يك نظريه درست، و در نتيجه ω ـ سازگار مي‌شد، ولي از $(\dagger)$ و $\mathbb{N} \vDash J$ نتيجه مي‌شود $\mathbb{N} \vDash \neg\omega\text{\_}\mathtt{Con}(\mathtt{PA}+J)$ كه يك تناقض است. پس $\mathbb{N} \vDash \neg J$. حال مجدداً از $(\dagger)$ نتيجه مي‌شود $\mathbb{N} \vDash \omega\text{\_}\mathtt{Con}(\mathtt{PA}+J)$، پس نظريه $\mathtt{PA}+J$ در واقع ωـ سازگار است ولي گزاره Σ_3 و نادرست J را اثبات مي‌كند. $\square$

لم بعد نشان مي‌دهد كه براي $n \geq 3$ دو شرط Σ_nـ درستي و $(n+1)$ـ سازگاري دو شرط غير قابل مقايسه‌اند.

لم ۷.۵.۴. *براي هر $n \geq 3$، يك نظريه $(n+1)$ـ سازگار وجود دارد كه Σ_nـ درست نيست و براي هر $n > 0$ يك نظريه Σ_nـ درست وجود دارد كه $(n+1)$ـ درست نيست.*

برهان. روشن است كه ωـ سازگاري nـ سازگاري را نتيجه مي‌دهد (براي هر $n \in \mathbb{N}$). پس لم قبل مثالي براي قسمت اول به دست مي‌دهد. براي قسمت دوم قرار مي‌دهيم $T_0 = \mathtt{PA} + \Pi_n\text{\_}Th(\mathbb{N})$ و $T_1 = T_0 + \neg\gamma_{T_0}$ كه در آن $\gamma_{T_0} \equiv \forall z[\mathtt{Proof}_{T_0}(z,\gamma_{T_0}) \rightarrow \exists z' < z\mathtt{Proof}_{T_0}(z',\neg\gamma_{T_0})]$. همان طور كه قبلاً ثابت كرديم، γ_{T_0} يك گزاره Π_{n+1} و درست (در مدل استاندارد حساب) مي‌باشد. پس براي هر $n \in \mathbb{N}$ داريم $\mathbb{N} \vDash \theta(\overline{n})$ كه در آن:

$$\theta(z) \equiv [\mathtt{Proof}_{T_0}(z,\gamma_{T_0}) \rightarrow \exists z' < z\mathtt{Proof}_{T_0}(z',\neg\gamma_{T_0})].$$

تمام جملات $\theta(\overline{n})$ عضو Σ_n هستند و $\Pi_n\text{\_}Th(\mathbb{N}) \subseteq T_1$ پس $T_1 \vdash \theta(\overline{n})$ (براي هر $n \in \mathbb{N}$). اما $T_1 \vdash \neg\gamma_{T_0}$ يعني $T_1 \vdash \exists z \neg\theta(z)$، بنابراين T_1 يك نظريه $(n+1)$ـ سازگار نيست. $\square$

قضيه ۸.۵.۴. *براي هر $n \geq 0$، اگر $T \supseteq \mathtt{PA}$ يك نظريه nـ سازگار و مجموعه اصول T نيز Σ_{n+1}ـ تعريف پذير باشد، آنگاه يك گزاره Π_{n+1} وجود دارد كه در T تصميم پذير نيست.*

$$\boxed{\texttt{PA} \subseteq T \;\;\&\;\; \texttt{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \;\;\&\;\; T\ is\ \text{n-consistent} \;\;\Rightarrow\;\; T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}}$$

برهان. اگر T داراي خاصیت Π_nـ تصمیم گیرنده بودن نباشد، آنگاه Π_{n+1}ـ تصمیم گیرنده هم نیست و چیزي براي اثبات وجود ندارد. پس فرض مي‌کنیم که T داراي خاصیت Π_nـ تصمیم گیرنده بودن باشد. با توجه به لم ۲.۲.۴، $\Pi_n-Th(\mathbb{N}) \subseteq T$، پس Tداراي خاصیت Σ_nـ درست بودن مي‌باشد. حال از قضیه ۵.۵.۴ نتیجه مي‌شود که یك گزاره Π_{n+1} وجود دارد که در T تصمیم‌پذیر نیست. □

۶.۴ بهینه بودن تعمیم

در این بخش نشان مي‌دهیم که نتایج فوق، از یك دیدگاه، بهینه هستند و شرطهاي Σ_nـ درستي و nـ سازگاري را نمي‌توان به Σ_{n-1}ـ درستي یا $(n-1)$ـ سازگاري تقلیل داد.

قضیه ۱.۶.۴. *براي هر $n \geq 1$، یك نظریه Σ_{n-1}ـ درست، شامل PA، Σ_{n+1}ـ تعریف پذیر وکامل وجود دارد.*

برهان. قرار مي‌دهیم $T_0 = \texttt{PA} + \Pi_{n-1}-Th(\mathbb{N})$ و $T_{i+1} = T_i + \varphi_i$ (اگر $T_{i+1} = T_i + \varphi_i$ سازگار باشد) و $T_{i+1} = T_i + \neg\varphi_i$ (اگر $T_{i+1} = T_i + \neg\varphi_i$ سازگار باشد). حال تعریف مي‌کنیم: $T_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$ (در اینجا $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3, \ldots$ یك شمارش از مجموعه جمله‌ها در زبان حساب مي‌باشد). T_ω توسط فرمول زیر قابل تعریف مي‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\texttt{Ax}_{T_\omega}(x) \equiv \texttt{Ax}_{\texttt{PA}}(x) \vee \Pi_{n-1}-Th(x) \vee \exists y\big[\texttt{seq}(y) \wedge \forall j < \texttt{lh}(y)\big[\big((y)_j = \ulcorner\varphi_j\urcorner \wedge \\
&\texttt{Con}_{T_0}(\langle (y)_0, \ldots, (y)_{j-1}, \varphi_j\rangle)\big) \vee \big((y)_j = \ulcorner\neg\varphi_j\urcorner \wedge \neg\texttt{Con}_{T_0}(\langle (y)_0, \ldots, (y)_{j-1}, \varphi_j\rangle) \\
&\qquad \wedge \texttt{Con}_{T_0}(\langle (y)_0, \ldots, (y)_{j-1}, \neg\varphi_j\rangle)\big)\big] \wedge (y)_{\texttt{lh}(y)-1} = x\big].
\end{aligned}$$

محمول $\texttt{Con}_{T_0}(x)$ که در فرمول فوق به کار رفته است، به صورت زیر تعریف مي‌شود:

$$\begin{aligned}
&\texttt{Con}_{T_0}(x) \equiv \texttt{seq}(x) \wedge \forall s, z[(\texttt{seq}(s) \wedge \forall i < \texttt{lh}(s)(\texttt{Ax}_{T_0}((s)_i) \vee (s)_i \in x)) \\
&\qquad \to \neg\texttt{Proof}(z, (\textstyle\bigwedge_{i=0}^{lh(s)-1} (s)_i) \to \bot)]
\end{aligned}$$

$\mathrm{seq}(x)$ به این معني است که x عدد گودل یك دنباله از فرمول‌ها است و $\mathrm{lh}(x)$ نشان دهنده طول آن دنباله مي‌باشد (توجه کنیم که seq و lh هردو Δ_0 هستند). به سادگي مي‌توان ملاحظه کرد که Ax_{T_ω} (معادل) یك فرمول Σ_{n+1} است، پس T_ω یك نظریه Σ_{n+1}_ تعریف‌پذیر مي‌باشد. با توجه به تعریف، روشن است که T_ω سازگار و کامل است. دقت مي‌کنیم که $\Pi_{n-1}\!-\!Th(\mathbb{N}) \subseteq T_\omega$ پس T_ω نمي‌تواند یك گزاره Σ_{n-1} نادرست را اثبات کند، پس T_ω، Σ_{n-1}_ درست نیز مي‌باشد. □

لم ۲.۶.۴. *الف: اگر یك نظریه Σ_n_ درست باشد آنگاه n_ سازگار هم است.*
ب: اگر یك نظریه Σ_{n-1}_ کامل و n_ سازگار باشد، Σ_n_ درست نیز است.

برهان. اثبات قسمت الف: فرض کنیم T یك نظریه Σ_n_ درست باشد و $T \vdash \exists x\psi(x)$ که در آن ψ یك فرمول Π_{n-1} است. با توجه به Σ_n_ درستي، $\mathbb{N} \vDash \exists x\psi(x)$، بنابراین $\mathbb{N} \vDash \psi(m)$ براي یك $m \in \mathbb{N}$. حال توجه کنیم که $\psi(\overline{m})$ یك گزاره Π_{n-1} و درست است، پس، با توجه به Σ_n_ درست بودن T نتیجه مي‌شود که $T \nvdash \neg\psi(\overline{m})$. اثبات قسمت ب: فرض کنیم T نظریه‌اي Σ_{n-1}_ کامل و n_ سازگار باشد و $T \vdash \exists x\psi(x)$ که در آن ψ یك فرمول Π_{n-1} است. با توجه به n_ سازگار بودن T، یك $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $T \nvdash \neg\psi(\overline{m})$. چون T یك نظریه Σ_{n-1}_ کامل است، پس $\mathbb{N} \nvDash \neg\psi(\overline{m})$ و در نتیجه $\mathbb{N} \vDash \psi(\overline{m})$، پس $\mathbb{N} \vDash \exists x\psi(x)$. □

نتیجه ۳.۶.۴. *براي هر $n \geq 1$، یك نظریه $(n-1)$_ سازگار، شامل PA، Σ_{n+1}_ تعریف پذیر و کامل وجود دارد.*

برهان. با توجه به لم ۲.۶.۴، Σ_{n-1}_ درستي $(n-1)$_ سازگاري را نتیجه مي‌دهد، پس مثال ارایه شد در فوق $(n-1)$_ سازگار هم است. □

نتیجه ۴.۶.۴. *یك توسیع کامل و Π_1_ تعریف پذیر از PA وجود دارد.*

برهان. با توجه به قضیه ۱.۶.۴ یك توسیع کامل و Σ_2_ کامل از PA وجود دارد و از ۴.۵.۴ نتیجه مي‌شود که این نظریه معادل یك نظریه Π_1_ تعریف پذیر است. □

۷.۴ غیر ساختاري بودن اثبات‌هاي با شرط nــ سازگاري

نتیجه بعد نشان می‌دهد که غیر ساختاری بودن قضیه ناتمامیتی که با استفاده از شرط nــ سازگاری اثبات شد، تصادفی نیست و در واقع هیچ برهان ساختاری برای آن وجود ندارد (برای $n \geq 3$). قبل از اثبات این مطلب، نیاز به لم زیر داریم (اثبات شده در [۸]).

لم ۱.۷.۴. *براي هر نظریه ωــ سازگار مانند T و هر جمله X، حداقل یکي از دو نظریه $T + X$ یا $T + \neg X$، ωــ سازگار است.*

برهان. فرض کنیم $T + X$ و $T + \neg X$ هیچکدام ωــ سازگار نباشند. پس فرمولهاي $A(x)$ و $B(x)$ وجود دارند به طوري که (I) $T + X \vdash \exists x A(x)$، (II) $T + \neg X \vdash \exists x B(x)$، و براي هر $n \in \mathbb{N}$ داریم (III) $T + X \vdash \neg A(\overline{n})$ و (IV) $T + \neg X \vdash \neg B(\overline{n})$. پس، با توجه به (I) و (II) داریم:

$$T \vdash [(X \wedge \exists x A(x)) \vee (\neg X \wedge \exists x B(x))]$$
$$\Rightarrow T \vdash \exists x[(X \wedge A(x)) \vee (\neg X \wedge B(x))] \quad (V)$$

از (III) و (IV) نتیجه مي‌شود که براي هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$T \vdash (X \to \neg A(\overline{n})) \wedge (\neg X \to \neg B(\overline{n}))$$
$$\Rightarrow T \vdash \neg(X \wedge A(\overline{n})) \wedge \neg(\neg X \wedge B(\overline{n}))$$
$$\Rightarrow T \vdash \neg[(X \wedge A(\overline{n})) \vee (\neg X \wedge B(\overline{n}))] \quad (VI).$$

حال از (VI) و (V) نتیجه مي‌شود که T یك نظریه ωــ سازگار نیست، تناقض. □

قضیه ۲.۷.۴. *برای هر $n \geq 3$ تابعی بازگشتی جزئی مانند f (حتی نسبت به اراکل $0^{(n)}$) وجود ندارد به طوری که هرگاه m عدد گودل یک فرمول Σ_{n+1} باشد که یک نظریه nــ سازگار و شامل PA را تعریف می کند، آنگاه $f(m)$ متوقف شده و عدد گودل یک گزاره مستقل از آن نظریه باشد.*

برهان. فرض کنید یک تابع جزئی $0^{(n)}$ــ محاسبه پذیر f با شرایط فوق وجود داشته باشد، یعنی برای هر Σ_{n+1} فرمول مانند Ψ، اگر $\mathcal{T}_\Psi = \{\alpha \mid \mathbb{N} \models \Psi(\ulcorner\alpha\urcorner)\}$ نظریه ای nــ سازگار و شامل PA باشد، آنگاه $f(\ulcorner\Psi\urcorner)$ متوقف شده و عدد گودل گزاره‌ای مستقل از $\mathcal{T}_\Psi$ را به دست دهد.

ωـ سازگاری PA با گزاره (با عدد گودل) x را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\forall\chi\big[\exists z\exists q\big(\mathtt{ConjAx}_{\mathtt{PA}}(q)\wedge\mathsf{Proof}(z,q\wedge x\to\exists v\chi(v))\big)\\ \to\exists v\forall z\forall q\big(\mathtt{ConjAx}_{\mathtt{PA}}(q)\to\neg\mathsf{Proof}(z,q\wedge x\to\neg\chi(\overline{v}))\big)\big]$$

فرمول فوق را با ωـ$\mathsf{Con}_{\mathtt{PA}}(x)$ نشان مي‌دهيم. چون f تابعی $0^{(n)}$ـ محاسبه پذیر است، پس گزاره‌های $f(x)=y$ و $f(x)\downarrow$ توسط فرمولهایی Σ_{n+1} قابل بیان هستند (برای مثال [۲۵] را ببینید). حال با استفاده از صورت پارامتری لم قطری، یک فرمول $\Theta(x)$ وجود دارد به طوری که:

$$\mathtt{PA}\vdash\Theta(x)\equiv$$

$$\big[f(\ulcorner\Theta\urcorner)\downarrow\wedge\boldsymbol{\omega}\text{-}\mathsf{Con}_{\mathtt{PA}}\big(f(\ulcorner\Theta\urcorner)\big)\wedge\ \big(x=f(\ulcorner\Theta\urcorner)\vee\mathtt{Ax}_{\mathtt{PA}}(x)\big)\big]\quad\bigvee$$

$$\big[f(\ulcorner\Theta\urcorner)\downarrow\wedge\neg\boldsymbol{\omega}\text{-}\mathsf{Con}_{\mathtt{PA}}\big(f(\ulcorner\Theta\urcorner)\big)\wedge\ \big(x=\neg f(\ulcorner\Theta\urcorner)\vee\mathtt{Ax}_{\mathtt{PA}}(x)\big)\big]\bigvee$$

$$\mathtt{Ax}_{\mathtt{PA}}(x).$$

با توجه به اینکه $n\geq 3$، به سادگی ملاحظه می‌شود که $\Theta(x)$ یک فرمول Σ_{n+1} است. اگر $f(\ulcorner\Theta\urcorner)\uparrow$ آنگاه $\Theta(x)\equiv\mathtt{Ax}_{\mathtt{PA}}(x)$ و در نتیجه $\mathcal{T}_\Theta=\mathtt{PA}$ یک نظریه nـ سازگار و شامل PA است. پس باید داشته باشیم $f(\ulcorner\Theta\urcorner)\downarrow$ که یک تناقض است. اگر نظریه $\mathtt{PA}\cup\{f(\ulcorner\Theta\urcorner)\}$، ωـ سازگار باشد، آنگاه $\Theta(x)\equiv(x=f(\ulcorner\Theta\urcorner)\vee\mathtt{Ax}_{\mathtt{PA}}(x))$ و در نتیجه $\mathcal{T}_\Theta=\mathtt{PA}\cup\{f(\ulcorner\Theta\urcorner)\}$ که یک نظریه nـ سازگار و شامل PA است. پس، بنا بر فرضی که در مورد تابع f داریم، گزاره $f(\ulcorner\Theta\urcorner)$ باید از $\mathcal{T}_\Theta$ مستقل باشد که تناقض است. درنتیجه $\mathtt{PA}\cup\{f(\ulcorner\Theta\urcorner)\}$ ω ـ سازگار نیست. حال از لم ۱.۷.۴ نتیجه می‌شود که $\mathtt{PA}\cup\{\neg f(\ulcorner\Theta\urcorner)\}$ باید ωـ سازگار باشد. اما در این حالت داریم:

$$\Theta(x)\equiv(x=\neg f(\ulcorner\Theta\urcorner)\vee\mathtt{Ax}_{\mathtt{PA}}(x)).$$

پس $\mathcal{T}_\Theta=\mathtt{PA}\cup\{\neg f(\ulcorner\Theta\urcorner)\}$ نظریه‌ای nـ سازگار و شامل PA است، و در نتیجه $f(\ulcorner\Theta\urcorner)$ باید مستقل از $\mathcal{T}_\Theta$ باشد که مجدداً یک تناقض می‌باشد. □

تذکر ۳.۷.۴. در الگوریتم فوق، شرط $0^{(n)}$_ محاسبه‌پذیر بودن f را نمي‌توان با $0^{(n+1)}$_ محاسبه‌پذیر بودن جایگزین کرد، زیرا با کمك اراکل $0^{(n+1)}$ مي‌توان به صورت زیر یك گزاره تصمیم‌ناپذیر را پیدا کرد: چون نظریه مورد نظر Σ_{n+1}_ تعریف‌پذیر است، پس این مسئله که یك گزاره داده شده در این نظریه اثبات‌پذیر است یا نه، توسط اراکل $0^{(n+1)}$ قابل تصمیم‌گیري است. حال کافي است یك جستجوي ساده روي همه گزاره‌هاي زبان حساب انجام دهیم؛ اگر نظریه n_ سازگار باشد، بنا بر قضیه ۸.۵.۴، یك گزاره Π_{n+1} وجود دارد که از این نظریه مستقل است و جستجوي فوق در نهایت یکي از این گزاره‌ها را پیدا مي‌کند.

۸.۴ آخرین نتایج

هایک در [۶]، پس از اثبات اینکه اگر مجموعه قضیه‌های یک نظریه T، Π_n_ تعریف‌پذیر بوده (برای یک $n \geq 2$) و نظریه n_ سازگار باشد، آنگاه T نمی‌تواند همه گزاره‌های درست Π_{n-1} را اثبات کند و ضمنا T کامل هم نیست (قضیه 2.5 در [۶])، این سوال را مطرح می‌کند که شرط n_ سازگاری در قضیه فوق را ضعیفتر کرد یا خیر. اخیرا در این مورد این نتیجه اثبات شده است [۱۴] :

قضیه ۱.۸.۴. *اگر مجموعه قضیه‌های یک نظریه سازگار $T \supseteq PA$، Π_{n+2}_ تعریف‌پذیر باشد، آنگاه T، Π_{n+1}_ کامل نیست (یعنی نمی‌تواند همه گزاره‌های درست Π_{n+1} را اثبات کند).*

برهان. فرض کنید $\forall x\tau(u,x)$ فرمولی باشد که مجموعه قضایای T را تعریف می‌کند که در آن $\tau(u,x)$ یک فرمول Σ_{n+1} است. با کمک لم قطری سازی فرمول φ طوری می‌سازیم که:

$$\mathtt{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x(\neg\tau(\ulcorner\varphi\urcorner, x) \wedge \forall y \leq x\ \tau(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, y)). \tag{۵.۴}$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که φ گزاره‌ای Σ_2 است. ψ را برابر جمله

$\exists x(\neg\tau(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, x) \wedge \forall y < x\tau(\ulcorner\varphi\urcorner, y))$

قرار می‌دهیم. با توجه به Σ_2 بودن φ، ψ هم Σ_2 خواهد بود. واضح است که $\mathtt{PA} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$. چون T نظریه‌ای سازگار است، حداقل یکی از دو گزاره $T \nvdash \varphi$ یا $T \nvdash \psi$ برقرار است. پس

$\mathbb{N} \vDash \exists x \neg\tau(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, x) \vee \exists x \neg\tau(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ و در نتیجه $\mathbb{N} \vDash \varphi \vee \psi$.

جهت رسیدن به تناقض فرض می‌کنیم که نظریه T، Π_{n+1}_ تمام باشد. درنتیجه Σ_{n+2}_ کامل نیز خواهد بود. دو حالت $\mathbb{N} \vDash \varphi$ و $\mathbb{N} \vDash \psi$ را جداگانه بررسی می‌کنیم. اگر $\mathbb{N} \vDash \varphi$ آنگاه $T \vdash \varphi$ (چون T، Σ_{n+2}_ کامل است). از طرف دیگر داریم $\mathbb{N} \vDash \neg\forall x \tau(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ (با توجه به تعریف φ). پس $T \nvdash \varphi$ (چون فرمول $\forall x \tau(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ مجموعه قضیه‌های نظریه T را تعریف می‌کند) و این یک تناقض است. اگر $\mathbb{N} \vDash \psi$ آنگاه $T \vdash \psi$ (چون T، Σ_{n+2}_ کامل است). در نتیجه $T \vdash \neg\varphi$. از طرف دیگر، با توجه به تعریف ψ داریم $\mathbb{N} \vDash \neg\forall x \tau(\ulcorner\neg\varphi\urcorner, x)$ و در نتیجه $T \nvdash \neg\varphi$ که دوباره یک تناقض است. □

قضیه بعد نشان می‌دهد که این نوع اثبات برای ناتمامیت نیز به طور اساسی غیر ساختاری است.

قضیه ۲.۸.۴. *تابع محاسبه‌پذیر f وجود ندارد به طوری که برای هر نظریه U_ψ که سازگار بوده و مجموعه قضیه‌های آن Π_{n+2} _ تعریف پذیر باشد، $f(\psi)\downarrow$ و برابر عدد گودل یک فرمول $\pi \in \Pi_{n+1}$ باشد که درست بوده ولی در نظریه U_ψ غیر قابل اثبات (در اینجا U_ψ نشان دهنده نظریه‌ای است که مجموعه قضیه‌های آن با فرمول ψ تعریف می‌شوند).*

برهان. فرض کنیم چنین تابعی وجود داشته باشد. با کمک صورت پارامتری لم قطری سازی، فرمول $\theta(x)$ را طوری می‌سازیم که:

$$\begin{aligned}&\mathsf{PA} \vdash \theta(x) \leftrightarrow Pr_{PA}(x) \vee (f(\ulcorner\theta\urcorner)\downarrow \wedge\, Con(\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + f(\ulcorner\theta\urcorner))\\ &\wedge Pr_{\mathsf{PA}+f(\ulcorner\theta\urcorner)}(x)) \vee (f(\ulcorner\theta\urcorner)\downarrow \wedge\\ &\ Con(\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner\theta\urcorner)) \wedge Pr_{\mathsf{PA}+\neg f(\ulcorner\theta\urcorner)}(x)).\end{aligned}$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که θ فرمولی Π_{n+2} است. اگر $f(\ulcorner\theta\urcorner)\uparrow$ آنگاه $U_\theta = \mathsf{PA}$ بنابراین U_θ یک نظریه سازگار و Π_{n+2}_ تعریف‌پذیر است. درنتیجه $f(\ulcorner\theta\urcorner)\downarrow$ (با توجه به فرضی که در مورد تابع f داریم) و این یک تناقض است. بنابراین $f(\ulcorner\theta\urcorner)\downarrow$. حداقل یکی از دو نظریه

$\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + f(\ulcorner\theta\urcorner)$

یا

$\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner\theta\urcorner)$

سازگار است. اگر $\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + f(\ulcorner\theta\urcorner)$ سازگار باشد آنگاه $U_\theta = \mathsf{PA} + f(\ulcorner\theta\urcorner)$ و این نظریه هم سازگار است (چون نظریه بزرگتر $\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + f(\ulcorner\theta\urcorner)$ را سازگار فرض کرده‌ایم). ولی با توجه به فرضی که در مورد تابع f داریم باید داشته باشیم $U_\theta \nvdash f(\ulcorner\theta\urcorner)$. اما به وضوح $U_\theta \vdash f(\ulcorner\theta\urcorner)$ که یک تناقض را ایجاد می‌کند. در حالت دوم (یعنی اگر نظریه $\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner\theta\urcorner)$ سازگار باشد) داریم $U_\theta = \mathsf{PA} + \neg f(\ulcorner\theta\urcorner)$ و درنتیجه U_θ یک نظریه سازگار است. پس $f(\ulcorner\theta\urcorner)$ باید یک گزاره درست و Π_{n+1} باشد که از نظریه U_θ مستقل است. بنابراین $\Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) \vdash f(\ulcorner\theta\urcorner)$ و در نتیجه $\mathsf{PA} + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner\theta\urcorner)$ ناسازگار است، که مجدداً یک تناقض می‌باشد. $\square$

تذکر ۳.۸.۴. در قضیه فوق، حتی اگر فرض کنیم که تابع f نسبت به اراکل 0^n محاسبه‌پذیر باشد باز هم حکم برقرار خواهد بود. زیرا به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که در این صورت هر سه فرمول $f(\ulcorner\theta\urcorner)\downarrow$ و $Pr_{\mathsf{PA}+f(\ulcorner\theta\urcorner)}(x)$ و $Pr_{\mathsf{PA}+\neg f(\ulcorner\theta\urcorner)}(x)$ عضو Σ_{n+1} می‌شوند و درنتیجه $\theta(x)$ همچنان عضو Π_{n+2} باقی خواهد ماند. ادامه برهان به همان صورت قبل خواهد بود.

در [۱۴] ارتباط جالبی بین اصول انعکاس[۷] و قضیه دوم ناتمامیت برای نظریه های تعریف‌پذیر برقرار شده است که در ادامه شرح داده می‌شود.

تعریف ۴.۸.۴. برای هر نظریه T در زبان حساب، مجموعه «اصول انعکاس محلی» [۸] ، که با نماد $Rfn(T)$ نمایش داده می‌شود، برابر مجموعه همه جمله‌ها به صورت $\mathtt{Pr}_T(\ulcorner\alpha\urcorner) \to \alpha$ می‌باشد. مجموعه «اصول انعکاس سراسری» [۹] نیز، که با نماد $RFN(T)$ نشان داده می‌شود، برابر مجموعه همه جمله‌ها به صورت $\forall x(\mathtt{Pr}_T(\ulcorner\alpha(\overline{x})\urcorner) \to \alpha(x))$ می‌باشد. اگر در این تعریف فرمول α را فقط

[۷] reflection principles

[۸] local reflection principles

[۹] global reflection principles

از رده Σ_n در نظر بگیریم، مجموعه‌های حاصل را به ترتیب با نمادهای $Rfn_{\Sigma_n}(T)$ و $RFN_{\Sigma_n}(T)$ نشان می‌دهیم.

به سادگی ملاحظه می‌شود که $RFN_{\Sigma_0}(T)$ و Σ_0ـ درستی T هر دو معادل سازگار بودن نظریه T هستند. بنابراین قضیه دوم ناتمامیت گودل را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد:

قضیه ۵.۸.۴. *برای هر نظریه T_ψ شامل PA، T_ψ دارای خاصیت Σ_0ـ درستی است، اگر و فقط اگر $T_\psi \nvdash RFN_{\Sigma_0}(T_\psi)$.*

این صورت از قضیه دوم ناتمامیت در [۱۴] به صورت زیر تعمیم داده شده است:

قضیه ۶.۸.۴. *برای هر نظریه Σ_{n+1} ـ تعریف‌پذیر T_ψ شامل PA، شرط‌های زیر معادل هستند:*

الف. T_ψ دارای خاصیت Σ_nـ درستی است.

ب. برای هر فرمول Σ_{n+1} مانند $\sigma(x)$، اگر $T_\sigma = T_\psi$ آنگاه $T_\sigma \nvdash RFN_{\Sigma_n}(T_\sigma)$.

ج. برای هر فرمول Σ_{n+1} مانند $\sigma(x)$، اگر $T_\sigma = T_\psi$ آنگاه $T_\sigma \nvdash RFN(T_\sigma)$.

۹.۴ جمع بندي نتایج

صورت معنایي قضیه اول ناتمامیت، یعني:

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_1 \ \& \ \ \mathbb{N} \models T \ \ \Rightarrow \ \ \Pi_1\text{-}Th(\mathbb{N}) \nsubseteq T}$$

را مي‌توان به صورت زیر تعمیم داد (قضیه ۱.۴.۴):

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_n \ \& \ \ \mathbb{N} \models T \ \ \Rightarrow \ \ \Pi_n\text{-}Th(\mathbb{N}) \nsubseteq T}$$

يك صورت از قضيه گودل ـ راسر كه به صورت:

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_1 \ \ \& \ \ T \ is \ 0\text{–consistent} \ \ \Rightarrow \ \ T \notin \Pi_1\text{–Deciding}}$$

بيان مي‌شود را به صورت زير مي‌توان تعميم داد (قضيه۴.۵.۸):

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \ \& \ \ T \ is \ \text{n–consistent} \ \ \Rightarrow \ \ T \notin \Pi_{n+1}\text{–Deciding}}$$

و در قضيه ۴.۷.۱ ثابت شد كه اين نتيجه به طور اساسي غير ساختي است، يعني هيچ الگوريتمي براي محاسبه (يكي از) جمله‌هاي تصميم ناپذير وجود ندارد (براي $n \geq 3$).
چون ۱ ـ سازگاري معادل Σ_1 ـ درستي است، قضيه اول ناتماميت را مي‌توان به اين صورت زير هم نوشت:

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_1 \ \ \& \ \ T \ is \ \Sigma_1\text{–sound} \ \ \Rightarrow \ \ T \notin \Pi_1\text{–Deciding}}$$

كه در قضيه ۴.۵.۵ به اين صورت تعميم داده شد:

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \ \& \ \ T \ is \ \Sigma_n\text{–sound} \ \ \Rightarrow \ \ T \notin \Pi_{n+1}\text{–Deciding}}$$

اثبات قضيه اخير، بر خلاف اثبات قضيه ۴.۵.۸، ساختاري بود و مي‌توانستيم جمله تصميم ناپذير را به شيوه‌اي الگوريتمي محاسبه كنيم. قضيه هاي ۴.۶.۲ و ۴.۶.۳ بهينه بودن اين تعميم‌ها را ثابت كردند:

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \ \ \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \ \& \ \ T \ is \ \Sigma_{n-1}\text{–sound} \ \ \not\Rightarrow \ \ T \notin \text{Complete}}$$

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \quad \mathtt{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \ \& \quad T\ is\ (n-1)\text{-consistent} \quad \not\Rightarrow \quad T \notin \text{Complete}}$$

و نتيجه ۳.۶.۴ به طور خاص نشان داد که صورت اوليه قضيه گودلـ راسر حتي به نظريه‌هاي Π_1ـ تعريف پذير قابل تعميم نيست:

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \quad \mathtt{Ax}_T \in \Pi_1 \ \ \& \quad T \text{ is consistent} \quad \not\Rightarrow \quad T \notin \text{Complete}}$$

در حالتی که تعریف‌پذیری را برای مجموعه قضیه‌های نظریه در نظر بگیریم، بنابر قضیه ۱.۸.۴ داریم:

$$\boxed{\mathtt{PA} \subseteq T \ \ \& \quad theorems(T) \in \Pi_{n+2} \ \ \& \quad T \text{ is consistent} \quad \Rightarrow \quad T \notin \Pi_{n+1} - \text{Complete}}$$

(منظور از $theorems(T)$ مجموعه قضیه‌های نظریه T است). بنابر قضیه ۲.۸.۴ این حالت از پدیده ناتمامیت هم به طور اساسی غیر ساختاری است.

مراجع

[1] L. Beklemishev, Gödel theorems and limits of their applicability I, *Russian Mathematical Surveys* 65:5 (2010) 857–899.

[2] G. Boolos, A new proof of the Gödel incompleteness theorem, *Notices of the American Mathematics Society* 36:4 (1989) 388–390.

[3] W. Craig, On axiomatizability within a system, *Journal of Symbolic Logic* 18:1 (1953) 30-32.

[4] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931) 173–198.

[5] P. Hájek and P. Pudlák, *Metamathematics of First Order Arithmetic*, Springer–Verlag (1998).

[6] P. Hájek, Experimental logics and Π^0_3 theories, *Jornal of Symbolic Logic* 42:4 (1997) 515–522.

[7] K. Ignatiev, On strong provability predicates and the associated modal logics, *Jornal of Symbolic Logic* 58:1 (1993) 249–290.

[8] D. Isaacson, Necessary and sufficient conditions for undecidability of the Gödel sentence and its truth, in: P. Clarck, D. DeVidi, M. Hallett (eds), *Vintage Enthusiasms: Essays in Honour of John Bell*, Springer (2011) 135–152.

[9] K. Ishii, A note on the first incompleteness theorem, *Mathematical Logic Qurterly* 49:2 (2003) 214–216.

[10] R. Jeroslow, Experimental logics and Δ_2^0 theories, *Journal of Philosophical Logic* 4:(1975) 253–267.

[11] R. W. Kay, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press (1991).

[12] M. Kåsa, Experimental logics, mechanism and knowable consistency, *Theoria* 78:1 (2012) 213–224.

[13] M. Kikuchi, A note on Boolos' proof of the incompleteness theorem, *Mathematical Logic Qurterly* 40:4 (1994) 528–532.

[14] M. Kikuchi, T. Kurahashi, Generalizations of Gödel's incompleteness theorem for Σ_n-definable theories of arithmetic, PREPRINT.

[15] H. Kitada, An implication of Gödel's incompleteness theorem, *Internatinal Journal of Pure and Applied Mathematics* 52:4 (2009) 511–567.

[16] H. Kitada, Rebuttal to the review of my paper "An implication of Gödel's incompleteness theorem", *Internatinal Journal of Pure and Applied Mathematics* 70:1 (2011) 11–14.

[17] M. Li and P. Vitány, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications*, Springer-Verlag (2008) 3rd. ed.

[18] B. J. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church, *Journal of Symbolic Logic* 1:3 (1937) 87–91.

[19] K. Roy, The shortest definition of a number in Peano arithmetic, *Mathematica Logic Quarterly* 49:1 (2003) 83–86.

[20] S. Salehi, Review of [15], *Zenterallblatt för Mathematik und ihre Grenzgebiete* [zbl 1186.03072].

[21] S. Salehi, Review of [16], *Zenterallblatt för Mathematik und ihre Grenzgebiete* [zbl 1231.03053].

[22] G. Serény, Boolos-style proofs of limitative theorems, *Mathematical Logic Quarterly* 50:2 (2004) 211–216.

[23] C. Smoryński, The incompleteness theorems, in: J. Barwise (ed.) *Handbook of Mathematical Logic*, North–Holland Amsterdam (1977) 821–865.

[24] R. Smullyan, *Gödel Incompleteness Theorems*, Oxford University Press (1992).

[25] R. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Springer-Verlag (1987).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات‌پذیری .... provability
استقرا .... induction
اصل .... principle
بازگشتی .... recursive
به طور بازگشتی شمارش پذیر .... recursively enumerable
بهینه .... optimal
پارادکس بری .... Berry paradox
پارادکس دروغگو .... liar paradox
پیچیدگی کولموگوروف .... Kolmogorov complexity
تابع بازگشتی اولیه .... primitive recursive function
تابع بازگشتی جزئی .... partial recursive function
تصمیم پذیر .... decidable
تصمیم‌ناپذیر .... undecidable
تعریف پذیر .... definable
تعریف‌ناپذیری .... undefinable
تعمیم .... generalization
تناقض .... contradiction
ثابت شایتین .... Chaitin constant

حساب پئانو	Peano arithmetic
حساب رابینسون	Robinson's arithmetic
خود ارجاع	self-refrence
درست	sound
دودویی	binary
راسری کردن	Rosserizing
سازگار	consistent
سازگاری	consistency
ساختاری	constructive
سلسله مراتب حسابی	arithmetical hierarchy
شمارش	enumeration
عدد گودل	Gödel number
عطف	conjunction
فرمول کراندار	bounded formula
فصل	disjunction
قضیه ناتمامیت گودل	Gödel incompleteness theorem
کامل	complete
گزاره	proposition
لم قطری	diagonal lemma
ماشین تورینگ	Turing machine
ماشین تورینگ جهانی	universal Turing machine
محاسبه پذیر	computable
مدل استاندارد حساب	standard model of arithmetic
مستقل	independent
نظریه	theory

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

arithmetical hierarchy	سلسله مراتب حسابی
Berry paradox	پارادکس بری
binary	دودویی
bounded formula	فرمول کراندار
Chaitin constant	ثابت شایتین
complete	کامل
computable	محاسبه پذیر
conjunction	عطف
consistency	سازگاری
constructive	ساختاری
contradiction	تناقض
consistent	سازگار
decidable	تصمیم پذیر
definable	تعریف پذیر
diagonal lemma	لم قطری
disjunction	فصل
enumeration	شمارش
generalization	تعمیم

Gödel incompleteness theorem .... قضیه ناتمامیت گودل
Gödel number .... عدد گودل
independent .... مستقل
induction .... استقرا
Kolmogorov complexity .... پیچیدگی کولموگوروف
liar paradox .... پارادکس دروغگو
optimal .... بهینه
partial recursive function .... تابع بازگشتی جزئی
Peano arithmetic .... حساب پئانو
primitive recursive function .... تابع بازگشتی اولیه
principle .... اصل
proposition .... گزاره
provability .... اثبات‌پذیری
recursive .... بازگشتی
recursively enumerable .... به طور بازگشتی شمارش پذیر
Robinson's arithmetic .... حساب رابینسون
Rosserizing .... راسری کردن
self-refrence .... خود ارجاع
standard model of arithmetic .... مدل استاندارد حساب
sound .... درست
theory .... نظریه
Turing machine .... ماشین تورینگ
undecidable .... تصمیم‌ناپذیر
undefinable .... تعریف‌ناپذیری
universal Turing machine .... ماشین تورینگ جهانی

نمایه

SURNAME: Seraji NAME: Payam

TITLE: Rosserizing and effecivizing some proofs of the first incompleteness theorem

SUPERVISOR: Saeed Salehi

ADVISOR: Jafar Sadegh Eivazloo

DEGREE: DOCTOR OF PHILOSOPHY SUBJECT: Pure Mathematics

FIELD: Mathematical Logic **University of Tabriz**

FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES DATE: 2016 NUMBER OF PAGES: 67

KEYWORDS: Gödel's incompleteness theorem, Rosserizing, Effecivizing, Kolmogorov complexity, Berry paradox.

ABSTRACT

In this thesis we investigate the Rosserizability and constructivity of some proofs of Gödel's first incompleteness theorem. By "Rosserizability" we mean that the proof goes through by assuming the (simple) consistency of the theory (rather than its e.g. ω-consistency). By "constructivity" the existence of an algorithm for constructing (one of) the independent sentence(s) is meant. We give a proof for the first incompleteness theorem which resembles Chaitin's and uses only the consistency assumption of the theory. But for Boolos' proof we show that the optimal condition for the independence of the sentence is consistency of the theory with its own consistency statement. Regarding the constructivity, we show that none of the proofs of Boolos or Chaitin can be constructive. In the last chapter, we present some generalizations of the first incompleteness theorem for definable theories.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY (PH.D.) IN **PURE MATHEMATICS** (MATHEMATICAL LOGIC)

Rosserizing and effecivizing some proofs of the first incompleteness theorem

SUPERVISOR

Saeed Salehi

ADVISOR

Jafar Sadegh Eivazloo

BY

Payam Seraji

2016